

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAKIR FİBONACCİ, k -ORESME DİZİLERİ VE ONLARIN BAZI ÖZEL
DÖNÜŞÜMLERİ İLE HİPERBOLİK KUATERNİYONLARI

Hakan AKKUŞ

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

TEZ JÜRİ ÜYELERİ
Prof. Dr. Engin ÖZKAN
Prof. Dr. Gül Karadeniz GÖZERİ
Doç. Dr. Ali AYDOĞDU
Doç. Dr. Tufan ÖZDİN
Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN

DOKTORA TEZİ
ERZİNCAN, 2026

© 2026 [Hakan AKKUŞ]. Tüm hakları saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Engin ÖZKAN danışmanlığında, Hakan AKKUŞ tarafından hazırlanan bu çalışma 01/06/2026 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan:	Prof. Dr. Gül Karadeniz GÖZERİ	İmza:
Üye :	Prof. Dr. Engin ÖZKAN	İmza:
Üye :	Doç. Dr. Ali AYDOĞDU	İmza:
Üye :	Doç. Dr. Tufan ÖZDİN	İmza:
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN	İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 2026 tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Bakır Fibonacci, k -Oresme dizileri ve onların bazı özel dönüşümleri ile hiperbolik kuaterniyonları” isimli “Doktora” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 01/06/2026

(İmza)

Hakan AKKUŞ

ÖZET

BAKIR FİBONACCİ, k -ORESME DİZİLERİ VE ONLARIN BAZI ÖZEL DÖNÜŞÜMLERİ İLE HİPERBOLİK KUATERNİYONLARI

Hakan AKKUŞ

Doktora Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

2026, 110 sayfa

Bu tez çalışmasında, matematiksel dizi kuramının ve sayı teorisinin önemli alanlarından biri olan özel sayı dizileri üzerinde iki temel eksenle kapsamlı bir genelleştirme ve uygulama çalışması yürütülmüştür.

Tezin ilk ana ekseninde, limit durumunda metalik oranlardan “bakır oranı” değerini veren ve klasik Fibonacci dizisinin yeni bir genellemesi olan Bakır Fibonacci dizisi tanımlanmıştır. Bu dizinin tekrarlama bağıntısından yararlanılarak Bakır Lucas dizisi türetilmiştir. Her iki dizinin karakteristik denklemleri ve kökleri bulunarak derin matematiksel ilişkiler kurulmuş; kapalı formülleri, üreteç fonksiyonları ve binom toplam formülleri ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Ayrıca, bu dizilere Catalan dönüşümü uygulanmış, elde edilen yeni diziler Hankel dönüşümüne tabi tutularak orijinal determinant yapıları elde edilmiştir. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin son aşamada dört boyutlu hiperkompleks sayı sistemlerinden olan hiperbolik kuaterniyonlara uygulamaları yapılarak; eşlenik, norm, Binet formülleri ve özel özdeşlikleri sistematik olarak hesaplanmıştır.

Tezin ikinci ana ekseninde ise klasik Oresme dizisinin parametrik bir uzantısı olarak k -Oresme dizisi kurgulanmış ve bu bağıntı vasıtasıyla k -Oresme-Lucas dizisi keşfedilmiştir. Bu yeni dizi ailesinin de karakteristik yapıları ve asimptotik davranışları incelenerek Binet formülleri ile toplam formülleri yapılandırılmıştır. Tıpkı ilk grupta olduğu gibi, k -Oresme ailesinin de Catalan ve Hankel dönüşümleri hesaplanarak literatürdeki diğer tamsayı dizileriyle olan geçişkenlikleri analiz edilmiştir. Son olarak, bu dizilerin hiperbolik kuaterniyon formları

tanımlanarak üreteç fonksiyonları ve aralarındaki karşılıklı bağıntılar cebirsel olarak ortaya konmuştur.

Tezin genelinde her iki aile için de Cassini, Catalan, d'Ocagne ve Vajda gibi kritik matematiksel özdeşlikler doğrulanmış ve elde edilen özgün bulgular literatüre kazandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Bakır Fibonacci sayıları, k -Oresme dizisi, Üreteç fonksiyonu, Cassini özdeşliği, Catalan sayıları, Hankel dönüşümü

ABSTRACT

COPPER FIBONACCI, k -ORESME SEQUENCES, AND SOME OF THEIR SPECIAL TRANSFORMATIONS AND HYPERBOLIC QUATERNIONS

Hakan AKKUŞ

Doctoral Thesis, Erzincan Binali Yıldırım University, Institute of Science and
Technology, Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

2026, 110 pages

This thesis presents a comprehensive study on special number sequences, one of the significant topics in sequence theory and number theory, through two main research directions involving generalizations and applications.

In the first part of the thesis, the Copper Fibonacci sequence, a new generalization of the classical Fibonacci sequence whose limiting ratio yields the copper ratio among metallic ratios, is defined. Based on its recurrence relation, the Copper Lucas sequence is derived. The characteristic equations and roots of both sequences are obtained, establishing fundamental mathematical relationships. Furthermore, their closed-form expressions, generating functions, and binomial sum formulas are investigated in detail. Catalan transformations are applied to these sequences, and the resulting sequences are further analyzed through Hankel transformations, revealing their underlying determinant structures. In addition, the Copper Fibonacci and Copper Lucas sequences are extended to the framework of hyperbolic quaternions, a four-dimensional hypercomplex number system. Within this setting, conjugates, norms, Binet-type formulas, and several special identities are systematically derived.

The second part of the thesis focuses on the construction of the k -Oresme sequence as a parametric generalization of the classical Oresme sequence. Through this recurrence structure, the k -Oresme-Lucas sequence is introduced and investigated. The characteristic properties and asymptotic behaviors of this new family of sequences are examined, and corresponding Binet formulas and summation identities are established. Similar to the first family, Catalan and Hankel transformations of the k -Oresme sequences are computed, enabling an analysis of their relationships with other well-known integer sequences. Finally, hyperbolic quaternion versions

of these sequences are defined, and their generating functions together with their mutual algebraic relationships are obtained.

Throughout the thesis, critical mathematical identities such as Cassini, Catalan, d'Ocagne, and Vajda are verified for both families, and the original findings are contributed to the literature.

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Copper Fibonacci numbers, k -Oresme sequence, Generating function, Cassini identity, Catalan numbers, Hankel transformation

TEŞEKKÜR

Bu doktora tezinin hazırlanması sürecinde, bilgi ve deneyimleriyle her aşamada yol gösteren, değerli katkı ve önerileriyle çalışmanın şekillenmesinde önemli rol oynayan tez danışmanım Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez izleme komitesi üyeleri Doç. Dr. Tufan ÖZDİN ve Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN'e tez süreci içinde sundukları yapıcı eleştiriler ve değerli katkılar için teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman yanımda oldukları ve bana verdikleri moral desteği için aileme minnettarım.

Bu tez çalışmasına 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı (2024/1 dönemi) kapsamında sağladığı maddi destek için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Hakan AKKUŞ

Haziran, 2026

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLOLAR DİZİNİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR	8
2.1. Fibonacci ve Lucas dizileri.....	8
2.2. Pell ve Pell-Lucas dizileri.....	9
2.3. Oresme ve Oresme-Lucas dizileri	10
2.4. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri.....	11
2.5. Mersenne ve Mersenne-Lucas dizileri.....	12
2.6. Catalan Sayıları	13
2.7. Hankel Dönüşümü	14
2.8. Hiperbolik Kuaterniyonlar.....	14
2.9. Metalik Oranlar.....	15
3. YÖNTEM	17
3.1. k -Fibonacci ve k -Lucas yapıları ile dönüşüm ve kuaterniyon uygulamaları	17
3.1.1. k -Fibonacci ve k -Lucas dizileri	17
3.1.2. k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin Catalan dönüşümleri	22
3.1.3. Catalan k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin Hankel dönüşümleri.....	24
3.1.4. Hiperbolik k -Fibonacci ve k -Lucas kuaterniyonları	24
3.2. k -Jacobsthal-Lucas yapısı ile dönüşüm uygulaması	28
3.2.1. k -Jacobsthal-Lucas dizisi	28
3.2.2. k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Catalan dönüşümü	30
3.2.3. Catalan k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Hankel dönüşümü.....	31
4. BULGULAR	32
4.1. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas yapıları ile dönüşüm ve kuaterniyon uygulamaları	32
4.1.1. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizileri	32

4.1.2. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Catalan dönüşümleri.....	44
4.1.3. Catalan Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Hankel dönüşümleri	46
4.1.4. Hiperbolik Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas kuaterniyonları.....	48
4.2. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas yapıları ile dönüşüm ve kuaterniyon uygulamaları	55
4.2.1. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri	55
4.2.2. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Catalan dönüşümleri.....	69
4.2.3. Catalan k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Hankel dönüşümleri	71
4.2.4. Hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonları.....	72
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	93
5.1. Sonuç	93
5.2. Öneriler.....	94
KAYNAKÇA	95

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Hiperbolik kuaterniyonların özellikleri.....	15
Tablo 2. Metalik oranlar	16

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

F_n	Fibonacci dizisi
L_n	Lucas dizisi
P_n	Pell dizisi
Q_n	Pell-Lucas dizisi
O_n	Oresme dizisi
OL_n	Oresme-Lucas dizisi
J_n	Jacobsthal dizisi
j_n	Jacobsthal-Lucas dizisi
M_n	Mersenne dizisi
ML_n	Mersenne-Lucas dizisi
$F_{k,n}$	k -Fibonacci dizisi
$L_{k,n}$	k -Lucas dizisi
$j_{k,n}$	k -Jacobsthal-Lucas dizisi
BF_n	Bakır Fibonacci dizisi
BL_n	Bakır Lucas dizisi
$O_{k,n}$	k -Oresme dizisi
$OL_{k,n}$	k -Oresme-Lucas dizisi
C_n	Catalan dizisi
$\det(A)$	A matrisinin determinanı
$F(x)$	Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu
$L(x)$	Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$P(x)$	Pell dizisinin üreteç fonksiyonu
$Q(x)$	Pell-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$J(x)$	Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu
$j(x)$	Jacobsthal-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$O(x)$	Oresme dizisinin üreteç fonksiyonu
$OL(x)$	Oresme-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$M(x)$	Mersenne dizisinin üreteç fonksiyonu
$ML(x)$	Mersenne-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$C(x)$	Catalan sayılarının üreteç fonksiyonu
$BF(x)$	Bakır Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$BL(x)$	Bakır Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$O_k(x)$	k -Oresme dizisinin üreteç fonksiyonu
$OL_k(x)$	k -Oresme-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$CBF(x)$	Catalan Bakır Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu
$CBL(x)$	Catalan Bakır Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$CO_k(x)$	Catalan k -Oresme dizisinin üreteç fonksiyonu
$COL_k(x)$	Catalan k -Oresme-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu
$HCBF_n$	Catalan Bakır Fibonacci dizisinin Hankel dönüşümü
$HCBL_n$	Catalan Bakır Lucas dizisinin Hankel dönüşümü
$HCO_{k,n}$	Catalan k -Oresme dizisinin Hankel dönüşümü
$HCOL_{k,n}$	Catalan k -Oresme-Lucas dizisinin Hankel dönüşümü
$\check{H}BF_n$	Hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonları
$\check{H}BL_n$	Hiperbolik Bakır Lucas kuaterniyonları
$\check{H}O_{k,n}$	Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları
$\check{H}OL_{k,n}$	Hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonları
$\check{H}O_k(x)$	Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu
$\check{H}OL_k(x)$	Hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonlarının üreteç fonksiyonu

1. GİRİŞ

Sayılar teorisi, matematiğin en köklü ve merak uyandıran dallarından biri olarak yüzyıllardır insanlığın ilgisini çekmiştir. Bu alan, temel olarak doğal sayılar ve onların özellikleri üzerine odaklanır. En basit haliyle 1, 2, 3 gibi sayılarla başlayan bu inceleme, zamanla çok daha derin ve karmaşık soruları beraberinde getirmiştir. İlk bakışta son derece basit görünen sayıların, içinde barındırdığı düzenler ve gizemler, matematikçileri sürekli yeni keşiflere yöneltmiştir. Sayılar teorisi, sadece matematiksel hesaplarla değil, aynı zamanda sezgi, soyutlama ve yaratıcı düşünmeyle ilerleyen bir disiplindir.

Tarihin en eski dönemlerinden beri insanlar sayıları sadece saymak ve ölçmek için değil, aynı zamanda onlar hakkında düşünmek için de kullanmıştır. Antik uygarlıklarda bile sayıların özelliklerine dair gözlemler yapılmış, bazı sayıların diğerlerinden farklı davranışlar gösterdiği fark edilmiştir. Özellikle asal sayılar gibi sadece kendisine ve bire bölünebilen özel sayılar, tarih boyunca ayrı bir öneme sahip olmuştur. Bu tür sayılar, günümüzde bile araştırılmakta ve her geçen yıl daha büyük asal sayılar keşfedilmektedir. Basit bir sayı dizisinin bile derin matematiksel yapılara kapı aralayabildiği sayılar teorisi, bu yönüyle oldukça özgün bir alandır.

Sayılar teorisinin dikkat çekici yönlerinden biri de, çözümleri kolay gibi görünen bazı problemlerinin yüzyıllar boyunca açıklığa kavuşamamış olmasıdır. Örneğin, bir sayının iki kare toplamı şeklinde yazılıp yazılamayacağı, bazı sayıların belirli kurallara göre bölünüp bölünemeyeceği gibi sorular, çok sayıda matematikçinin üzerinde çalıştığı konular arasında yer almıştır. Bu alanda ortaya atılan bazı soruların çözülmesi yüzyıllar sürmüştür, bazıları ise hâlâ cevapsız kalmıştır. Bu durum, sayılar teorisinin hem çekiciliğini hem de zorluğunu ortaya koyar.

Günümüzde sayılar teorisi, sadece teorik bir merak alanı olmanın ötesine geçmiştir. Özellikle dijital çağda, bilgi güvenliği ve şifreleme teknolojilerinin temelinde sayılar teorisinin önemli sonuçları yer alır. Bilgisayarlar aracılığıyla yapılan büyük çaplı asal sayı testleri ve algoritmalar, bankacılık sistemlerinden internet güvenliğine kadar birçok alanda kullanılmaktadır. Böylece, bir zamanlar sadece düşünsel bir uğraş olarak görülen bu matematik dalı, modern teknolojinin vazgeçilmez bir parçası haline gelmiştir.

Fibonacci dizisi; bölünebilme kuralları, asal sayılar ve kongrüanslar ile olan derin ilişkileri sayesinde sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Fibonacci dizisi, her sayının kendisinden önce gelen iki sayının toplamı olarak tanımlandığı, düzenli ve örüntüsel bir yapıya sahip olan özel bir sayı dizisidir. Sıfırdan başlayarak 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... şeklinde devam

eden bu dizinin temel yapısı oldukça basit görünse de, içerisinde barındırdığı matematiksel özellikler oldukça zengindir. İlk kez 13. yüzyılda Leonardo Fibonacci tarafından bir tavşan çoğalma problemiyle birlikte ortaya konulmuş olsa da, zaman içinde bu dizinin önemi çok daha geniş alanlara yayılmıştır. Sadece doğadaki yapılarla değil, aynı zamanda matematiksel kuramlarla da çok yönlü bir şekilde ilişkilendirilmiştir. Fibonacci dizisi de doğal sayılardan oluştuğu için bu teoremin ilgi alanına doğrudan girer. Ancak bu ilişki sadece dizinin elemanlarıyla sınırlı kalmaz. Fibonacci dizisi, sayıların aralarındaki yapısal ilişkileri, bölünebilme özelliklerini, asal sayı kalıplarını ve modüler aritmetik içindeki davranışlarını inceleyen sayılar teorisine çok sayıda örnek ve çalışma alanı sunar. Bu dizi üzerinde yapılan analizler, sayıların rastlantısal değil; belirli matematiksel kurallar çerçevesinde hareket ettiğini gösteren önemli kanıtlar ortaya koymuştur. Örneğin, Fibonacci dizisindeki sayıların birbirine oranı, dizide ilerledikçe sabit bir değere yaklaşır. Bu oran, matematikte "altın oran" olarak bilinen ve doğada, sanatta, mimaride sıkça karşımıza çıkan irrasyonel bir sayıdır. Sayılar teorisi açısından bakıldığında bu, sayı dizileri ile geometrik ve estetik yapılar arasında derin bir bağlantının olduğunu gösterir. Ayrıca Fibonacci sayılarını belirli sayılara bölüp kalanlara bakıldığında, bu dizinin tekrarlayan desenler oluşturduğu görülür. Bu özellik, modüler sistemler içinde sayıların nasıl davrandığını anlamaya çalışan sayılar teorisi açısından oldukça önemlidir.

Bir başka dikkat çekici nokta ise Fibonacci dizisinde yer alan asal sayıların dağılımıdır. Bazı Fibonacci sayıları asaldır, fakat bu asal sayıların dizide ne sıklıkla ya da hangi kurala göre ortaya çıktığı hâlâ matematikçiler tarafından araştırılan bir konudur. Sayılar teorisinde asal sayıların önemi büyüktür; çünkü asal sayılar, doğal sayıların yapıtaşları olarak kabul edilir. Bu nedenle Fibonacci dizisindeki asal sayıların analizi, sayıların temel doğasına dair yeni anlayışlar geliştirilmesine katkıda bulunur.

Fibonacci dizisi ayrıca, bazı matematiksel teoremlerin ve kimliklerin ortaya çıkmasına da olanak sağlar. Örneğin, belirli iki Fibonacci sayısının birbirine göre asal olma durumu, bu dizinin sayı teorisine sunduğu başka bir araştırma alanıdır. Ayrıca Fibonacci dizisinin her n . teriminin, kendinden önceki terimlerle belirli cebirsel bağıntılar kurduğu da bilinmektedir. Bu tür ilişkiler, sayıların nasıl bir düzene bağlı olarak hareket ettiğini göstermesi açısından önemlidir.

Tüm bu nedenlerle, Fibonacci dizisi sadece ilginç bir matematiksel örüntü değil, aynı zamanda sayılar teorisinin birçok temel konusuna dokunan bir yapıdır. Bu dizi sayesinde sayıların ardındaki gizli ilişkiler, örüntüler ve kurallar daha görünür hâle gelir. Sayılar teorisinin temel

amacı olan sayıların doğasını anlama çabası, Fibonacci dizisinin sunduğu bu zengin yapılar sayesinde daha derinlikli bir boyuta ulaşır. Dolayısıyla Fibonacci dizisi, sayılar teorisinin hem araştırma alanı hem de uygulama aracı olarak önemli bir yer tutar. Matematiksel düşüncenin soyuttan somuta, basitten karmaşığa uzanan yolculuğunda, Fibonacci dizisi ve sayılar teorisi el ele ilerleyen iki güçlü kavram olarak öne çıkar.

Fibonacci dizisi, matematikte çok sayıda genelleştirmeye açık yapısıyla dikkat çeken özel bir dizidir. En bilinen genelleştirmelerden biri, Lucas dizisidir. Lucas dizisi de tıpkı Fibonacci dizisi gibi aynı toplama kuralına dayanır (yani her terim önceki iki terimin toplamıdır), ancak başlangıç değerleri farklıdır: 2 ve 1. Bu küçük değişiklik, dizinin tüm yapısını etkiler ve Lucas sayıları ile Fibonacci sayıları arasında birçok ortak özellik ve bağlantı bulunur. Lucas sayılarından başka örnekler vermek gerekirse Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, k -Fibonacci, k -Lucas dizileri de sayılar teorisinde büyük öneme sahiptir ve bilim insanlarının ilgisini çekmiş ve bu ilgi günümüzde de geçerliğini korumuştur.

Bu bilgilere ilaveten Fibonacci dizisinin genelleştirmeleri, matematiğin sınırlarını genişletmeye olanak tanıyan yaratıcı yaklaşımlar sunar. Bu genelleştirmeler sayesinde, sadece belirli bir kurala bağlı kalan klasik diziden öteye geçilerek, çok daha çeşitli ve esnek yapılar elde edilir. Farklı başlangıç değerleriyle, daha fazla sayıda önceki terimi içeren tanımlarla ya da çeşitli matematiksel sistemler içinde yapılan değişimlerle elde edilen bu yeni diziler, sayıların davranışlarına dair daha derin bir anlayış kazandırır. Bu tür genellemeler, matematiksel örüntülerin sadece tek bir biçimde değil, pek çok farklı biçimde ortaya çıkabileceğini gösterir. Ayrıca, karmaşık problemlerin çözümlerinde bu genelleştirilmiş dizilerden yararlanmak mümkün olur. Özellikle bilgisayar bilimi, kriptografi, doğa modellemeleri ve algoritma tasarımı gibi alanlarda, klasik Fibonacci yapısının ötesine geçmek çoğu zaman daha etkili sonuçlar verebilir. Kısacası, Fibonacci dizisinin farklı biçimlerde yeniden yorumlanması, hem matematiksel keşifler hem de gerçek dünya uygulamaları açısından büyük bir zenginlik sağlar.

Bu tezde ise Fibonacci dizisinin yeni bir genellemesi olan ve metalik oranlardan bakır oranını veren Bakır Fibonacci dizisi ile k -Oresme dizisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu dizilerin tekrarlama bağıntısından yararlanarak Bakır Lucas ve k -Oresme-Lucas dizileri keşfedilmiştir. Ek olarak bu tanımlanan dizilerin toplam formülleri, üreteç fonksiyonları ve özel özdeşlikler gibi birçok özellikleri bulunmuştur. Son olarak bu dizilerin hiperbolik kuaterniyonlara uygulaması yapılmıştır ve dizilerle ilişkilendirme yapıp birçok ilginç bağıntı keşfedilmiştir.

Çalışmamızla ilgili literatürde olan bazı önemli çalışmalar ile ilgili kısa bilgiler aşağıda sıralanmıştır.

Macfarlane (1902) çalışmasında hiperbolik kuaterniyonları tanımlayarak bu cebirsel yapının matematiksel temelini ortaya koymuştur. Ayrıca hiperbolik kuaterniyonların cebirsel özelliklerini ayrıntılı olarak incelemiş, çarpma kurallarını ve temel yapısal özelliklerini açıklamış; ek olarak bu kuaterniyonların hiperbolik geometri, uzay dönüşümleri ve fiziksel problemlerin modellenmesi gibi alanlardaki potansiyel kullanım imkanlarını değerlendirmiştir.

Horadam, (1974) çalışmasında Oresme sayıları üzerine kapsamlı araştırma yapmış ve bu sayı dizisinin temel özelliklerini incelemiştir. Çalışmasında Oresme sayılarına ait çeşitli bağıntılar, özdeşlikler ve yineleme ilişkileri elde ederek bu sayı dizisinin matematiksel yapısına önemli katkılar sağlamıştır.

De Spinadel (1998) çalışmasında metalik oranların özelliklerini ayrıntılı olarak incelemiş ve bu oranların matematiksel yapısını incelemiştir. Ek olarak çalışmasında metalik oranların tanımları, temel özellikleri ve farklı sayı dizileri ile ilişkileri üzerinde durarak bu alandaki teorik gelişmelere katkıda bulunmuştur.

Melham (1999) çalışmasında Pell sayıları üzerine yaptığı çalışmada bu sayı dizisinin temel özelliklerini ve çeşitli bağıntılarını incelemiştir. Ayrıca Fibonacci sayılarının toplam formüllerine ilişkin yeni özdeşlikler ve eşitlikler elde ederek bu sayı dizilerinin cebirsel yapısına ait bilgiler vermiştir.

Solinas (1999) çalışmasında Mersenne sayılarını genelleştirerek bu sayı dizisine farklı bir bakış açısı kazandırmıştır. Çalışmasında genelleştirilmiş Mersenne sayılarının cebirsel özelliklerini incelemiş, bu sayılar arasındaki ilişkileri ortaya koymuş ve çeşitli özdeşlikler ile bağıntılar elde etmiştir.

Barry (2005) çalışmasında Catalan sayıları üzerine yaptığı çalışmada bu sayı dizisinin temel özelliklerini ve kombinatorik yapıdaki önemini incelemiştir. Ayrıca Catalan sayılarının üretic fonksiyonunu ele alarak bu fonksiyonun özelliklerini açıklamış ve sayı dizisinin çeşitli bağıntılarının elde edilmesindeki rolünü ortaya koymuştur.

Koshy ve Salmassi (2006) çalışmasında Catalan sayılarının temel özelliklerini ayrıntılı olarak incelemiş ve bu sayı dizisine ait çeşitli özdeşlikler ile bağıntıları ortaya koymuştur. Ayrıca

Catalan sayılarının farklı yöntemlerle elde edilmesini sağlayan yineleme bağıntıları ve cebirsel ilişkiler üzerinde çalışarak bu sayı dizisinin matematiksel yapısına katkıda bulunmuştur.

Falcon ve Plaza (2007) çalışmasında k -Fibonacci dizisini tanımlayarak bu dizinin klasik Fibonacci dizisinin bir genellemesi olduğunu göstermiştir. Çalışmalarında k -Fibonacci dizisinin temel özelliklerini, yineleme bağıntılarını, kapalı formunu ve çeşitli cebirsel özdeşliklerini inceleyerek bu sayı dizisinin matematiksel yapısını ayrıntılı bir şekilde ele almışlardır.

Vajda (2008) çalışmasında Lucas sayıları üzerine yaptığı kapsamlı çalışmada bu sayı dizisinin tanımı, temel özellikleri ve Fibonacci sayıları ile olan ilişkilerini ayrıntılı olarak incelemiştir. Çalışmada Lucas sayılarının yineleme bağıntıları, üreteç fonksiyonları ve çeşitli cebirsel özellikleri ele alınarak birçok yeni özdeşlik ve bağıntı elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlarla sayı dizileri teorisine önemli katkılar sağlanmıştır.

Falcon ve Plaza (2009) çalışmasında k -Fibonacci dizisinin türevleri üzerine kapsamlı hesaplamalar yaparak bu türevlerin özelliklerini incelemiştir. Çalışmada elde edilen değerler arasındaki ilişkiler araştırılmış ve k -Fibonacci dizisinin türevlerine ait çeşitli bağıntılar ile matematiksel sonuçlar ortaya konmuştur.

Stanimirović vd. (2009) çalışmasında Catalan matrisini ayrıntılı bir şekilde inceleyerek bu matrisin cebirsel yapısını ve temel özelliklerini ele almıştır. Çalışmada Catalan matrisinin determinantı, ters matrisi, kuvvetleri ve çeşitli matris bağıntıları incelenmiş, elde edilen sonuçlarla bu yapının matematiksel özellikleri elde edilmiştir.

Falcon (2011) çalışmasında k -Lucas dizilerini tanımlayarak bu dizilerin temel özelliklerini ve Fibonacci türü dizilerle olan ilişkilerini incelemiştir. Çalışmasında k -Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu, yineleme bağıntıları, kapalı formu ve çeşitli özdeşlikleri elde edilerek dizinin matematiksel yapısı ayrıntılı bir şekilde ifade edilmiştir.

Al-Homidan (2012) çalışmasında Hankel dönüşümünü ve bu dönüşümün matematiksel özelliklerini ayrıntılı olarak ele almıştır. Ayrıca Hankel matrisinin yapısı, özellikleri ve farklı matematiksel problemlerdeki kullanımı üzerine incelemeler yaparak, Hankel matrisleri ile dönüşüm arasındaki ilişkileri literatüre kazandırılmıştır.

Falcon (2012) çalışmasında k -Lucas dizisi üzerine yaptığı çalışmada bu dizinin çeşitli matematiksel uygulamalarını ele almıştır. Çalışmada k -Lucas dizisinin temel özellikleri, yineleme bağıntıları, üreteç fonksiyonu ve farklı dizilerle olan ilişkileri incelenerek birçok yeni bağıntı ve özdeşlik elde edilmiştir.

Falcon (2013) çalışmasında k -Fibonacci dizisine Catalan dönüşümünü uygulayarak elde edilen yeni dizinin matematiksel özelliklerini incelemiştir. Çalışmada dönüşüm sonucunda ortaya çıkan bağıntılar, üreteç fonksiyonları ve k -Fibonacci dizisi ile olan ilişkiler araştırılarak çeşitli özdeşlikler ve önemli sonuçlar ortaya çıkarılmıştır.

Aydin (2018) çalışmasında k -Fibonacci dizisini hiperbolik kuaterniyonlar üzerine uygulayarak bu iki matematiksel yapının ilişkisini incelemiştir. Çalışmada k -Fibonacci sayılarının hiperbolik kuaterniyonlar üzerindeki genişletilmiş biçimleri ele alınmış ve elde edilen yeni yapılar için çeşitli bağıntılar, özdeşlikler ve matematiksel özellikler literatüre kazandırılmıştır.

Koshy (2019) çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayıları üzerine yaptığı çalışmada bu sayı dizilerinin temel özelliklerini ayrıntılı olarak incelemiştir. Çalışmada Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki ilişkiler ele alınmış, çeşitli yeni bağıntılar ve özdeşlikler elde edilerek bunların matematiksel ispatları verilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlarla sayı dizilerinin cebirsel yapısına katkı sağlanmıştır.

Özkan vd. (2020) çalışmasında k -Lucas dizisine Catalan dönüşümünü uygulayarak elde edilen yeni dizinin matematiksel özelliklerini incelemiştir. Çalışmada uygulanan dönüşüm sonucunda oluşan bağıntılar, yineleme ilişkileri ve üreteç fonksiyonları ele alınmış, k -Lucas dizisi ile Catalan dönüşümü arasındaki ilişkiyi açıklayan birçok özdeşlik ve önemli sonuç elde edilmiştir.

Akkuş vd. (2021) çalışmasında k -Jacobsthal-Lucas dizisine Catalan dönüşümünü uygulayarak elde edilen yeni dizinin özelliklerini incelemiştir. Çalışmada dönüşüm sonucunda oluşan terimler kullanılarak Hankel matrisi oluşturulmuş ve bu matrisin determinantı, yapısal özellikleri ve dizi ile olan ilişkileri araştırılarak çeşitli bağıntılar açıklanmıştır.

Godase (2021) çalışmasında hiperbolik k -Fibonacci ve k -Lucas kuaterniyonları üzerine yaptığı çalışmada bu yapıların cebirsel özelliklerini ayrıntılı olarak incelemiştir. Çalışmada hiperbolik kuaterniyonların tanımları verilmiş, k -Fibonacci ve k -Lucas dizileri ile olan ilişkileri araştırılmıştır. Ayrıca bu kuaterniyonlara ait çeşitli bağıntılar, özdeşlikler ve matematiksel sonuçlar elde edilerek literatüre katkı sağlanmıştır.

Saba vd. (2021) çalışmasında Mersenne Lucas sayılarını ayrıntılı bir şekilde inceleyerek bu sayı dizisinin temel özelliklerini ve matematiksel yapısını ele almıştır. Çalışmada Mersenne Lucas sayıları ile homojen simetrik fonksiyonlar arasındaki ilişkiler araştırılmış, bu bağlantılar kullanılarak çeşitli özdeşlikler, bağıntılar ve yeni matematiksel sonuçlar elde edilmiştir.

Brod ve Michalski (2022) çalışmasında Fibonacci dizisinin farklı genellemeleri arasında yer alan Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri üzerine kapsamlı bir çalışma gerçekleştirmiştir. Çalışmada bu dizilerin temel özellikleri incelenmiş, toplam formülleri, yineleme bağıntıları ve özel özdeşlikleri elde edilerek sayı dizileri arasındaki ilişkiler ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, temel sayı dizilerinin tanımları ayrıntılı bir şekilde sunulmaktadır. Ayrıca, söz konusu dizilere ait karakteristik denklemler ile Binet formülleri gibi önemli temel bilgiler açıklanmaktadır. Ek olarak, çalışmanın bütünlüğünü desteklemek amacıyla Catalan sayıları ve metalik oranlar hakkında genel bilgilere de bu bölümde yer verilmiştir.

2.1. Fibonacci ve Lucas dizileri

Tanım 2.1.1. Fibonacci dizisi, 0 ve 1 ile başlayan ve ilk iki terimi hariç her bir terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamıyla elde edilen bir sayı dizisidir. Bu dizi,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

tekrarlama bağıntısı ile ifade edilir (Koshy, 1998).

Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

Tanım 2.1.2. İlk iki terimi $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olan ve

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Lucas dizisi denir (Vajda, 2008).

Lucas dizisinin bazı terimleri aşağıdaki gibidir:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \dots$$

Ayrıca Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$f^2 - f - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri;

$$f_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618033988749894 \dots \text{ ve } f_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklinde bulunmuştur. Buradaki f_1 sayısı metalik oranlardan altın orandır. Ek olarak Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülleri

- (Koshy, 1998) $F_n = \frac{f_1^n - f_2^n}{f_1 - f_2}$

- (Vajda, 2008) $L_n = f_1^n + f_2^n$

şeklinde ifade edilmiştir.

Son olarak da Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları

- (Koshy, 2001) $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$
- (Djordjevic, 2004) $L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$

olarak elde edilmiştir.

2.2. Pell ve Pell-Lucas dizileri

Tanım 2.2.1. İlk iki terimi $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olan ve

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Pell dizisi denir (Melham, 1999).

Pell dizisinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \dots$$

Tanım 2.2.2. İlk iki terimi $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olan ve

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Pell-Lucas dizisi denir (Koshy, 2014).

Pell-Lucas dizisinin terimleri aşağıdaki gibi ilerlemektedir:

$$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, 16238, \dots$$

Ayrıca Pell ve Pell-Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$d^2 - 2d - 1 = 0$$

biçiminde olup kökleri,

$$d_1 = 1 + \sqrt{2} \cong 2,414213562 \dots \text{ ve } d_2 = 1 - \sqrt{2}$$

dir. Burada d_1 sayısı metalik oranlardan gümüş orandır. Ek olarak Pell ve Pell-Lucas dizilerinin Binet formülleri ise

- (Melham, 1999) $P_n = \frac{d_1^n - d_2^n}{d_1 - d_2}$

- (Koshy, 2014) $Q_n = d_1^n + d_2^n$

şeklinde elde edilmiştir.

Son olarak da Pell ve Pell-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları

- (Walker, 2011) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2}$
- (Tascı ve Tas, 2011) $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2-x}{1-2x-x^2}$

olarak ifade edilmiştir.

2.3. Oresme ve Oresme-Lucas dizileri

Tanım 2.3.1. İlk iki terimi $O_0 = 0$ ve $O_1 = \frac{1}{2}$ olan

$$O_{n+2} = O_{n+1} - \frac{1}{4}O_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Oresme dizisi denir (Horadam, 1974).

Oresme dizisinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \frac{7}{128}, \frac{1}{32}, \dots$$

Tanım 2.3.2. İlk iki terimi $OL_0 = 2$ ve $OL_1 = 1$ olan

$$OL_{n+2} = OL_{n+1} - \frac{1}{4}OL_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Oresme-Lucas dizisi denir (Soykan, 2021).

Oresme-Lucas dizisinin bazı terimleri aşağıdaki gibidir:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \dots$$

Ayrıca Oresme ve Oresme-Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = 0$$

biçiminde olup kökleri,

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ ve } a_2 = \frac{1}{2}$$

dir. Ek olarak Oresme ve Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri,

- (Horadam, 1974) $O_n = \frac{n}{a_1^n}$
- (Soykan, 2021) $OL_n = a_1^{n-1}$

şeklinde elde edilmiştir.

Son olarak da Oresme ve Oresme-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları

- $O(x) = \sum_{n=0}^{\infty} O_n x^n = \frac{2x}{4+4x+x^2}$
- $OL(x) = \sum_{n=0}^{\infty} OL_n x^n = -\frac{4}{x-2}$

olarak bulunmuştur (Soykan, 2021).

2.4. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri

Tanım 2.4.1. İlk iki terimi $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ olan ve

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.7)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Jacobsthal dizisi denir (Horadam, 1996).

Jacobsthal dizisinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, \dots$$

Tanım 2.4.2. İlk iki terimi $j_0 = 2$ ve $j_1 = 1$ olan ve

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Jacobsthal-Lucas dizisi denir (Brod ve Michalski, 2022).

Jacobsthal-Lucas dizisinin bazı terimleri aşağıdaki gibidir:

$$2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, 2047, 4097, 8191, 16385, \dots$$

Ayrıca Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$c^2 - c - 2 = 0$$

biçiminde olup kökleri,

$$c_1 = 2 \text{ ve } c_2 = 1$$

dir. Ek olarak Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin Binet formülleri

- (Horadam, 1996) $J_n = \frac{c_1^n - c_2^n}{c_1 - c_2}$
- (Michalski, 2022) $j_n = c_1^n + c_2^n$

şeklinde ifade edilmiştir.

Son olarak da Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları

- $J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n = \frac{x}{1-x-2x^2}$
- $j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n x^{n-1} = \frac{x+4x^2}{1-x-2x^2}$

olarak elde edilmiştir (Yeşilyurt ve Değirmen, 2025).

2.5. Mersenne ve Mersenne Lucas dizileri

Tanım 2.5.1. İlk iki terimi $M_0 = 0$ ve $M_1 = 1$ olan ve

$$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Mersenne dizisi denir (Solinas, 1999).

Mersenne dizisinin ilk birkaç terimi aşağıdaki gibidir:

$$0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, \dots$$

Tanım 2.5.2. İlk iki terimi $ML_0 = 2$ ve $ML_1 = 3$ olan ve

$$ML_{n+2} = 3ML_{n+1} - 2ML_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Mersenne-Lucas dizisi denir (Saba vd., 2021).

Mersenne-Lucas dizisinin terimleri aşağıdaki gibi ilerlemektedir:

$$2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, 1025, 2049, \dots$$

Ayrıca Mersenne ve Mersenne-Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

biçiminde olup kökleri,

$$m_1 = 2 \text{ ve } m_2 = 1$$

dir. Ek olarak Mersenne ve Mersenne-Lucas dizilerinin Binet formülleri

- (Solinas, 1999) $M_n = \frac{m_1^n - m_2^n}{m_1 - m_2}$
- (Saba vd., 2021) $N_n = m_1^n + m_2^n$

şeklinde bulunmuştur.

Son olarak da Mersenne ve Mersenne-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları

- (Devi ve Devibala, 2021) $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n = \frac{x}{1-3x+2x^2}$
- (Saba ve Boussayoud, 2021) $ML(x) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n x^n = \frac{2-3x}{1-3x+2x^2}$

olarak elde edilmiştir.

2.6. Catalan sayıları

Catalan sayıları, genellikle yinelemeli olarak tanımlanmış nesneleri içeren çeşitli sayma problemlerinde ortaya çıkan bir doğal sayı dizisidir. Bunlara Eugene Catalan'ın adı verilmiştir ancak daha önce 1730'larda Minggatu tarafından keşfedilmiştir (Larcombe, 1999).

n -inci Catalan sayısı C_n , merkezi binom katsayıları açısından doğrudan şu şekilde ifade edilmiştir (Koshy ve Salmassi, 2006): $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}. \quad (2.11)$$

Şimdi Catalan sayılarının bazı terimleri verilmiştir:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ... (OEIS'deki A000108 dizisi).

Ayrıca Catalan sayıları aşağıdaki bağıntılar yardımıyla da elde edilmiştir (Barry, 2005):

- $C_0 = 1$ ve $C_n = \sum_{i=1}^n C_{i-1} C_{n-i}$,
- $C_0 = 1$ ve $C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$.

Ek olarak aşağıdaki matrise ise Catalan matrisi denilmiştir ve

$$C_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & \dots \\ 1 & 1 & & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & & \dots \\ 5 & 5 & 3 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

şeklinde oluşturulmuştur (Stanimirović, 2009).

Ayrıca Catalan sayılarının üretic fonksiyonu $C(x)$ ile gösterirsek

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad (2.13)$$

olarak ifade edilmiştir (Barry, 2019).

2.7. Hankel dönüşümü

Doğrusal cebirde Hankel matrisi (veya katalektikant matrisi), adını matematikçi Hermann Hankel'den alır. Bu özel türdeki dikdörtgen matrislerin ayırt edici özelliği, sol üstten sağ alta inen eğik köşegenler boyunca tüm elemanların aynı olmasıdır. Yani, matrisin her eğik köşegeninde yer alan elemanlar sabit bir değeri paylaşmıştır.

Yani $A = \{a_0, a_1, a_2 \dots\}$ kümesinin elemanları reel sayılar olmak üzere

$$H_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \text{ ve } H_n = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \vdots & a_n & \vdots \\ a_2 & \vdots & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_n & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ile tanımlanan dönüşüme Hankel dönüşümü denir (Layman, 2001). Ek olarak hankel dönüşüm matrisinin özellikleri ile ilgili literatürde birçok çalışma yapılmıştır (Al-Homidan, 2012).

Son olarak da bir Hankel matrisinin determinantı sayı dizilerinin özelliklerini incelemeye, moment problemlerinde, sinyal işleme, zaman serisi analizi, kontrol teorisi, ve ortogonal polinom teorisinde önemli rol oynamaktadır.

2.8. Hiperbolik kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar, karmaşık sayıların daha yüksek boyutlu bir genellemesi olarak ortaya çıkan ve özellikle üç boyutlu uzayda dönüşleri ifade etmek için kullanılan önemli bir matematiksel yapıdır. Kuaterniyonlar ilk kez 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından tanıtılmıştır. Hamilton, karmaşık sayıların iki boyuttaki dönüşleri temsil etmesinden esinlenerek, üç boyutlu uzaydaki dönüşleri ifade edebilecek yeni bir sayı sistemi geliştirmiştir.

Bu sayı sistemi dört bileşenli bir yapıdan oluşur ve bir gerçekte kısım ile üç sanal bileşen içerir. Kuaterniyonlar hem teorik matematikte hem de uygulamalı alanlarda önemli bir yere sahiptir; özellikle üç boyutlu uzaydaki dönüşlerin ifade edilmesinde bilgisayar grafikleri, robotik ve uzay mühendisliği gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Hiperbolik kuaterniyonlar cebiri (q) ise soyut cebir alanında elemanları belirli bir biçimde tanımlanan ve gerçekte sayılar kümesi üzerinde kurulu, değişmeli olmayan (non-komütatif) bir cebirsel yapıdır:

$$q = xi_1 + yi_2 + zi_3 + ti_4, x, y, z, t \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Burada i_1, i_2, i_3 ve i_4 ile ilgili bilgiler aşağıdaki Tablo 1’de verilmiştir. Bu yapının temelini atan Alexander Macfarlane, hiperbolik kuaterniyonların çarpım özelliklerini sistematik bir biçimde tanımlamıştır. (Macfarlane, 1902).

Tablo 1. Hiperbolik kuaterniyonların özellikleri (Macfarlane, 1902)

$\cdot$	i_1	i_2	i_3	i_4
i_1	i_1	i_2	i_3	i_4
i_2	i_2	i_1	i_4	$-i_3$
i_3	i_3	$-i_4$	i_1	i_2
i_4	i_4	i_3	$-i_2$	i_1

Ayrıca hiperbolik kuaterniyonların dört boyutlu cebiri, geçmişte tanımlanmış olan daha kapsamlı bikuaterniyon cebirinin bazı temel özelliklerini içinde barındırır. Her iki yapı da, bölünmüş karmaşık sayı düzlemine izomorfik alt cebirler içerir. Ek olarak, klasik kuaterniyon cebiri nasıl farklı karmaşık düzlemlerin bir birleşimi olarak düşünülebiliyorsa, hiperbolik kuaterniyon cebiri de aynı reel eksen (doğruyu) paylaşan bölünmüş karmaşık düzlemlerin bir demeti (ya da kalemi) şeklinde değerlendirilebilir.

Bu yapının temelini atan kişi, 1890’larda bu konuyu "Fizik Cebiri" (Algebra of Physics) adıyla tanıtan Alexander Macfarlane olmuştur. Macfarlane bu kavramı ilk kez 1891’de Amerikan Bilimin İlerlemesi Derneği (AAAS) aracılığıyla duyurmuş, ardından 1894’te yayımladığı Uzay Analizi Üzerine Beş Makale (Five Papers on Space Analysis) adlı kitabında işlemiş, nihayet 1900 yılında Lehigh Üniversitesi’nde verdiği derslerle konuyu daha geniş bir kitleye ulaştırmıştır.

2.9. Metalik oranlar

Metalik oranlar, altın oran gibi iyi bilinen matematiksel oranların daha genel bir sınıfını oluşturmaktadır. Bu oranlar genellikle irrasyonel sayılar olup, belirli cebirsel denklemlerin

kökleri olarak tanımlanırlar. Aynı zamanda metalik oranlar, Fibonacci dizisi başta olmak üzere bazı özel sayı dizilerinin limit değerleriyle doğrudan ilişkilidir. Bu özellikleri sayesinde metalik oranlar, sayı dizilerinin yapısal ve asimptotik davranışlarının incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Uygulama alanları incelendiğinde ise matematiksel diziler ve cebirin yanı sıra estetik, tasarım (özellikle altın oran ve gümüş oran), mimari, müzik, sanat ile doğada gözlemlenen simetri ve büyüme kalıpları gibi pek çok farklı disiplinde karşımıza çıktığı görülmektedir.

Aşağıda, metalik oranların sistematik bir biçimde düzenlenmiş tablosu sunulmakta olup (Tablo 2), her bir metalik orana karşılık gelen dizilerin OEIS (Tamsayı Dizileri Elektronik Ansiklopedisi) veri tabanındaki kodları da ayrıca belirtilmiştir. Söz konusu veri tabanı, Neil Sloane tarafından oluşturulmuş ve literatürde yaygın biçimde kullanılan kapsamlı bir tamsayı dizileri kaynağıdır (Sloane, 2008). Ayrıca başka bir çalışmada metalik oranlara ilişkin kuramsal çerçeve ve sınıflandırma ayrıntılı biçimde ele alınmıştır (Spinadel, 1998).

Tablo 2. Metalik oranlar

..... Oran	Değeri	OEIS
Plastik	1.324717957244746...	A182097
Altın	1.618033988749895...	A001622
Gümüş	2.414213562373095...	A014176
Bronz	3.302775637731995...	A098316
Bakır	4.23606797749979...	A098317
Nikel	5.192582403567252...	A098318
Alüminyum	6.16227766016838...	A176398
Demir	7.140054944640259...	A176439
Kalay	8.123105625617661...	A176458
Kurşun	9.109772228646444...	A176522

3. YÖNTEM

Bu bölümde k -Fibonacci dizisi ve bu diziden esinlenerek literatürde yapılan çalışmalar ve bazı özel dizilerin Catalan, Hankel ve hiperbolik kuaterniyonlar üzerine uygulaması ile ilgili bilgiler verilmiştir. Ek olarak tanımlanan dizilerin üreteç fonksiyonu ve özel özeşlikleri hesaplanmıştır.

3.1. k -Fibonacci ve k -Lucas yapıları ile dönüşüm ve kuaterniyon uygulamaları

Bu başlık altında k -Fibonacci ve k -Lucas dizileri tanımlanmıştır. Ayrıca, bu diziler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ek olarak da bu dizilerin Catalan dönüşümleri ile hiperbolik kuaterniyonlar üzerindeki uygulamaları ele alınmıştır ve birçok bağıntı elde edilmiştir.

3.1.1. k -Fibonacci ve k -Lucas dizileri

Tanım 3.1.1.1. İlk iki terimi $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ olmak üzere

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye k -Fibonacci dizisi denir (Falcon ve Plaza, 2007).

Bu tekrarlama bağıntısında $k = 1$ alındığında Fibonacci sayıları ve $k = 2$ alındığında Pell sayıları elde edilmiştir.

Tanım 3.1.1.2. İlk iki terimi $L_{k,0} = 2$ ve $L_{k,1} = k$ olmak üzere,

$$L_{k,n+2} = kL_{k,n+1} + L_{k,n}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye k -Lucas dizisi denir (Falcon 2011).

Bu tekrarlama bağıntısında $k = 1$ alındığında Lucas sayıları elde edilir.

Ek olarak k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - kx - 1 = 0 \quad (3.3)$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri;

$$x_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \text{ ve } x_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

olarak elde edilmiştir. Karakteristik denklemin kökleri ile aşağıdaki özellikler sağlanmıştır:

$$x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = -1, x_1 - x_2 = \sqrt{k^2 + 4} \text{ ve } x_1^2 + x_2^2 = k^2 + 2.$$

Bu bilgilere göre k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin Binet formülleri ise,

- (Falcon ve Plaza, 2007) $F_{k,n} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$
- (Falcon, 2011) $L_{k,n} = x_1^n + x_2^n$

biçiminde ifade edilmiştir.

Aşağıda bu dizilerin bazı terimleri verilmiştir:

k -Fibonacci dizisi için;

- $F_{k,0} = 0,$
- $F_{k,1} = 1,$
- $F_{k,2} = k,$
- $F_{k,3} = k^2 + 1,$
- $F_{k,4} = k^3 + 2k,$
- $F_{k,5} = k^4 + 3k^2 + 1,$
- $F_{k,6} = k^5 + 4k^3 + 3k$ (Falcon ve Plaza, 2007).

k -Lucas dizisi için

- $L_{k,0} = 2,$
- $L_{k,1} = k,$
- $L_{k,2} = k^2 + 2,$
- $L_{k,3} = k^3 + 3k,$
- $L_{k,4} = k^4 + 4k^2 + 2,$
- $L_{k,5} = k^5 + 5k^3 + 5k,$
- $L_{k,6} = k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2$ (Falcon 2011),

olarak bulunmuştur.

Ek olarak k -Fibonacci dizisi ile ilgili bazı önemli özellikler aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.1.1.1. $n, r \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Falcon ve Plaza, 2009):

- i. (Kapalı Form) $F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} (k^2 + 4)^i$,
- ii. (Catalan Özdeşliği) $F_{k,n-r+1} F_{k,n+r+1} - F_{k,n+r}^2 = (-1)^{n+r+1} F_{k,r}^2$,
- iii. (d'Ocagne Özdeşliği) $F_{k,r} F_{k,n+1} - F_{k,r+1} F_{k,n} = (-1)^n F_{k,r-n}$,
- iv. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{k,n}}{F_{k,n-1}} = x_1$,
- v. (Üreteç Fonksiyon) $\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} x^n = \frac{x}{1-kx-x^2}$.

İspat. ii. k -Fibonacci dizisinin Binet formülü ve karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} F_{k,n-r} F_{k,n+r} - F_{k,n}^2 &= \frac{x_1^{n-r} - x_2^{n-r}}{x_1 - x_2} \frac{x_1^{n+r} - x_2^{n+r}}{x_1 - x_2} - \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{x_1^{2n} - x_1^{n-r} x_2^{n+r} - x_2^{n-r} x_1^{n+r} + x_2^{2n} - x_1^{2n} + x_1^n x_2^n + x_1^n x_2^n - x_2^{2n}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)} \\ &= -x_1^{n+r} x_2^{n+r} \left(\frac{x_1^r - x_2^r}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{x_1^r - x_2^r}{x_1 - x_2} \right). \end{aligned}$$

Son eşitlikten $x_1 x_2 = -1$ ve $F_{k,n} = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$ yerlerine yazılırsa

$$F_{k,n-r+1} F_{k,n+r+1} - F_{k,n+r}^2 = (-1)^{n+r+1} F_{k,r}^2$$

istenilen elde edilmiştir.

iv. k -Fibonacci dizisinin Binet formülü ve limit özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitliklerin doğruluğu sağlanmıştır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{k,n}}{F_{k,n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}}{\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1^n}{x_1^{n-1}} = x_1.$$

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları k -Fibonacci dizisinin Binet formülü, üreteç fonksiyonunun tanımı, geometrik serilerin özellikleri ve k -Fibonacci dizisinin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak gösterilir.

Teorem 3.1.1.2. $n, r \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Falcon ve Plaza, 2008):

i. $F_{k,r+n} = F_{k,r}F_{k,n-1} + F_{k,r+1}F_{k,n}$,

ii. $F_{k,2n} = \frac{1}{k}(F_{k,n+1}^2 - F_{k,n-1}^2)$,

iii. $\sum_{r=0}^n F_{k,r} = \frac{1}{k}(F_{k,n+1} + F_{k,n} - 1)$.

İspat. i. k -Fibonacci dizisinin Binet formülü ve karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} F_{k,r}F_{k,n-1} + F_{k,r+1}F_{k,n} &= \frac{x_1^r - x_2^r}{x_1 - x_2} \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2} + \frac{x_1^{r+1} - x_2^{r+1}}{x_1 - x_2} \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)} [x_1^{n+r} \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + x_2^{n+r} \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)]. \end{aligned}$$

Son eşitlikten $-x_1 = \frac{1}{x_2}$ ve $-x_2 = \frac{1}{x_1}$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$F_{k,r}F_{k,n-1} + F_{k,r+1}F_{k,n} = F_{k,r+n}$$

istenilen elde edilmiştir.

Diğer şıkların ispatları k -Fibonacci dizisinin tekrarlama bağıntısı ve Binet formülü kullanılarak gösterilir.

Şimdi de k -Lucas dizisi ile ilgili bazı önemli özellikler aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.1.1.3. $n, r \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Falcon, 2011):

i. (Kapalı Form) $L_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} k^{n-2i} (k^2 + 4)^i$,

ii. (Catalan Özdeşliği) $L_{k,n-r}L_{k,n+r} - L_{k,n}^2 = (-1)^{n-r}L_{k,2r} + 2(-1)^{n+1}$,

iii. $L_{k,n}F_{k,n} = F_{k,2n}$,

iv. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{k,n}}{L_{k,n-r}} = x_1^r$,

v. (Üreteç Fonksiyon) $\sum_{n=0}^{\infty} L_{k,n} x^n = \frac{2-kx}{1-kx-x^2}$.

İspat. ii. k -Lucas dizisinin Binet formülü ve karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
L_{k,n-r}L_{k,n+r} - L_{k,n}^2 &= (x_1^{n-r} + x_2^{n-r})(x_1^{n+r} + x_2^{n+r}) - (x_1^n + x_2^n)(x_1^n + x_2^n) \\
&= x_1^{2n} + x_1^{n-r}x_2^{n+r} + x_2^{n-r}x_1^{n+r} + x_2^{2n} - x_1^{2n} - 2x_1^n x_2^n - x_2^{2n} \\
&= x_1^{n-r}x_2^{n-r}(x_1^{2r} + x_2^{2r}) - 2x_1^n x_2^n.
\end{aligned}$$

Son eşitlikten $x_1 x_2 = -1$ ve $L_{k,n} = x_1^n + x_2^n$ bağıntıları yerine yazılırsa

$$L_{k,n-r}L_{k,n+r} - L_{k,n}^2 = (-1)^{n-r}L_{k,2r} + 2(-1)^{n+1}$$

istenilen elde edilmiştir.

v. Toplam sembolünün özellikleri ve k -Lucas dizisinin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L_{k,n} x^n &= 2 + kx + \sum_{n=2}^{\infty} L_{k,n} x^n \\
&= 2 + kx + \sum_{n=2}^{\infty} (L_{k,n-1} + L_{k,n-2}) x^n \\
&= 2 + kx + x \sum_{n=1}^{\infty} L_{k,n} x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_{k,n} x^n \\
&= \frac{2-kx}{1-kx-x^2}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Diğer ispatlar k -Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu, k -Lucas dizisinin Binet formülü ve dizinin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak gösterilir.

Teorem 3.1.1.4. $m, n, r \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Falcon, 2012):

- i. $L_{k,-n} = (-1)^{n+1}L_{k,n}$,
- ii. $L_{k,n} = (-1)^{n+1}(L_{k,2n+1}F_{k,n} - L_{k,2n}F_{k,n+1})$,
- iii. $L_{k,m(n+1)+r} = L_{k,m}L_{k,mn+r} - (-1)^m L_{k,m(n-1)+r}$.

İspat. i. k -Lucas dizisinin Binet formülü kullanılırsa

$$L_{k,-n} = x_1^{-n} + x_2^{-n} = \frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} = \frac{x_1^n + x_2^n}{x_1^n x_2^n}$$

elde edilmiştir. k -Lucas dizisinin karakteristik denkleminin özelliklerinden

$$x_1 x_2 = -1$$

bağıntısı kullanılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L_{k,-n} = (-1)^{n+1} L_{k,n}$$

eşitliği bulunmuştur ve böylece ispat tamamlanmıştır.

Diğer ispatlar k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılarak eşitlikler elde edilir.

3.1.2. k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin Catalan dönüşümleri

Tanım 3.1.2.1. k -Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümü $CF_{k,n}$ ile gösterelim. Böylece

$$CF_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} F_{k,i}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Falcon, 2013).

Bu dönüşüm kullanılarak Catalan k -Fibonacci dizisinin bazı terimleri:

- $CF_{k,1} = \sum_{i=0}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} F_{k,i} = 1,$
- $CF_{k,2} = \sum_{i=0}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} F_{k,i} = k + 1,$
- $CF_{k,3} = k^2 + 2k + 3,$
- $CF_{k,4} = k^3 + 3k^2 + 7k + 8,$
- $CF_{k,5} = k^4 + 4k^3 + 12k^2 + 22k + 24,$
- $CF_{k,6} = k^5 + 5k^4 + 18k^3 + 43k^2 + 73k + 75,$

şeklinde bulunmuştur. Bu dönüşümün terimlerini matrisler yardımıyla da bulanabilmiştir. Yani,

$$\begin{bmatrix} CF_{k,1} \\ CF_{k,2} \\ CF_{k,3} \\ CF_{k,4} \\ CF_{k,5} \\ CF_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k,1} \\ F_{k,2} \\ F_{k,3} \\ F_{k,4} \\ F_{k,5} \\ F_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Açık formatta yazarsak aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir (Falcon, 2013):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ k+1 \\ k^2+2k+3 \\ k^3+3k^2+7k+8 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots \\ 1 & 1 & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2+1 \\ k^3+2k \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Ek olarak, k -Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümünün tanımı kullanılarak k -Lucas dizisinin Catalan dönüşümünün tanımı aşağıdaki gibi yapılmıştır:

$$CL_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} L_{k,i}, n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Bu dönüşüm yardımıyla Catalan k -Lucas dizisinin terimleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Özkan vd., 2020):

- $CL_{k,1} = \sum_{i=0}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} L_{k,i} = L_{k,1} = k,$
- $CL_{k,2} = \sum_{i=0}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} L_{k,i} = \frac{1}{3} \binom{3}{1} L_{k,1} + \binom{2}{0} L_{k,2} = k^2 + k + 2,$
- $CL_{k,3} = \sum_{i=0}^3 \frac{i}{6-i} \binom{6-i}{3-i} L_{k,i} = k^3 + 2k^2 + 5k + 4,$
- $CL_{k,4} = \sum_{i=0}^4 \frac{i}{8-i} \binom{8-i}{4-i} L_{k,i} = k^4 + 3k^3 + 9k^2 + 14k + 12,$
- $CL_{k,5} = \sum_{i=0}^5 \frac{i}{10-i} \binom{10-i}{5-i} L_{k,i} = k^5 + 4k^4 + 14k^3 + 30k^2 + 46k + 36,$

şeklinde bulunmuştur. Bu dönüşümün terimlerini matrisler yardımıyla da bulanabilmiştir. Yani,

$$\begin{bmatrix} CL_{k,1} \\ CL_{k,2} \\ CL_{k,3} \\ CL_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots \\ 1 & 1 & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,2} \\ L_{k,3} \\ L_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Açık formatta yazarsak aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir (Özkan vd., 2020):

$$\begin{bmatrix} k \\ k^2+k+2 \\ k^3+2k^2+5k+4 \\ k^4+3k^3+9k^2+14k+12 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots \\ 1 & 1 & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k^2+2 \\ k^3+3k \\ k^4+4k^2+2 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

3.1.3. Catalan k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin Hankel dönüşümleri

k -Fibonacci dizisine Catalan dönüşümü uygulandıktan sonra bulunan $CF_{k,n}$ terimlerine Hankel dönüşümü uygulanırsa;

- $HCF_{k,1} = \det[1] = 1,$
- $HCF_{k,2} = \det \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & k^2+2k+3 \end{bmatrix} = 2,$
- $HCF_{k,3} = \det \begin{bmatrix} 1 & k+1 & k^2+2k+3 \\ k+1 & k^2+2k+3 & k^3+3k^2+7k+8 \\ k^2+2k+3 & k^3+3k^2+7k+8 & k^4+4k^3+12k^2+22k+24 \end{bmatrix} = 5,$

eşitlikleri elde edilmiştir (Falcon, 2013).

Benzer şekilde k -Lucas dizisine Catalan dönüşümü uygulandıktan sonra bulunan $CL_{k,n}$ terimlerine Hankel dönüşümü uygulanırsa;

- $HCL_{k,1} = \det[k] = k,$
 - $HCL_{k,2} = \det \begin{bmatrix} k & k^2+k+2 \\ k^2+k+2 & k^3+2k^2+5k+4 \end{bmatrix} = -4,$
 - $HCL_{k,3}$
- $$= \det \begin{bmatrix} k & k^2+k+2 & k^3+2k^2+5k+4 \\ k^2+k+2 & k^3+2k^2+5k+4 & k^4+3k^3+9k^2+14k+12 \\ k^3+2k^2+5k+4 & k^4+3k^3+9k^2+14k+12 & k^5+4k^4+14k^3+30k^2+46k+36 \end{bmatrix}$$
- $$= k^3 - 4k^2 - 8k - 16,$$

sonuçlarına ulaşılmıştır (Özkan vd., 2020).

3.1.4. Hiperbolik k -Fibonacci ve k -Lucas kuaterniyonları

Bu bölümde k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin hiperbolik kuaterniyonlar üzerine bir uygulaması yapılmıştır. Daha sonra bu uygulamanın Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve toplam formülleri gibi birçok özellikleri üzerine bilgiler verilmiştir. Son olarak da k -Fibonacci ve k -Lucas dizileri ile hiperbolik kuaterniyon değerleri ilişkilendirilmesi yapılarak birçok bağıntı keşfedilmiştir.

Tanım 3.1.4.1. $k \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Hiperbolik k -Fibonacci kuaterniyonları $\check{H}F_{k,n}$ ve hiperbolik k -Lucas kuaterniyonları $\check{H}L_{k,n}$ sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\check{H}F_{k,n} = F_{k,n}i_1 + F_{k,n+1}i_2 + F_{k,n+2}i_3 + F_{k,n+3}i_4 = (F_{k,n}, F_{k,n+1}, F_{k,n+2}, F_{k,n+3})$$

ve

$$\check{H}L_{k,n} = L_{k,n}i_1 + L_{k,n+1}i_2 + L_{k,n+2}i_3 + L_{k,n+3}i_4 = (L_{k,n}, L_{k,n+1}, L_{k,n+2}, L_{k,n+3}).$$

Burada $F_{k,n}$; n^{th} k -Fibonacci dizisinin terimidir, $L_{k,n}$; n^{th} k -Lucas dizisinin terimidir ve i_1, i_2, i_3, i_4 ise Tablo 1'deki hiperbolik kuaterniyon değerleridir (Aydın, 2018).

Aşağıda ise bu dizilerin hiperbolik kuaterniyonlarının ilk üç terimi yazılmıştır:

- $\check{H}F_{k,0} = i_2 + ki_3 + (k^2 + 1)i_4,$
- $\check{H}F_{k,1} = i_1 + ki_2 + (k^2 + 1)i_3 + (k^3 + 2k)i_4,$
- $\check{H}F_{k,2} = ki_1 + (k^2 + 1)i_2 + (k^3 + 2k)i_3 + (k^4 + k^3 + 2k^2 + 1)i_4$

ve

- $\check{H}L_{k,0} = 2i_1 + ki_2 + (k^2 + 2)i_3 + (k^3 + 3k)i_4,$
- $\check{H}L_{k,1} = ki_1 + (k^2 + 2)i_2 + (k^3 + 3k)i_3 + (k^4 + 4k^2 + 2)i_4,$
- $\check{H}L_{k,2} = (k^2 + 2)i_1 + (k^3 + 3k)i_2 + (k^4 + 4k^2 + 2)i_3 + (k^5 + 5k^3 + 5k)i_4,$

şeklinde bulunmuştur (Aydın, 2018).

Aşağıdaki teoremlerde hiperbolik k -Fibonacci ve k -Lucas kuaterniyonları ile ilgili önemli teoremler verilmiştir.

Teorem 3.1.4.1. $k \in \mathbb{R}$ ve $n, t \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Godase, 2021):

i. $\check{H}F_{k,n+2} = k\check{H}F_{k,n+1} + \check{H}F_{k,n},$

ii. $\check{H}L_{k,n+2} = k\check{H}L_{k,n+1} + \check{H}L_{k,n},$

iii. (Binet Formülleri) $\check{H}F_n = \frac{\overline{x_1}x_1^n - \overline{x_2}x_2^n}{x_1 - x_2}$ ve $\check{H}L_n = \overline{x_1}x_1^n + \overline{x_2}x_2^n,$

burada

$$\overline{x_1} = i_1 + x_1i_2 + x_1^2i_3 + x_1^3i_4 = (1, x_1, x_1^2, x_1^3),$$

$$\overline{x_2} = i_1 + x_2 i_2 + x_2^2 i_3 + x_2^3 i_4 = (1, x_2, x_2^2, x_2^3).$$

şeklinde ifade edilmiştir.

$$\text{iv. } \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i \check{H}F_{k,i} = \check{H}F_{k,2n},$$

$$\text{v. } \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i \check{H}L_{k,i} = \check{H}L_{k,2n},$$

$$\text{vi. } \check{H}F_{k,n+t} = F_{k,n} \check{H}F_{k,t+1} - F_{k,n-1} \check{H}F_{k,t},$$

$$\text{vii. } \check{H}F_{k,2n+t} = L_{k,n} \check{H}F_{k,n+t} - (-1)^n \check{H}F_{k,t}.$$

İspat. i. Hiperbolik k -Fibonacci kuaterniyonların tanımı kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} k\check{H}F_{k,n+1} + \check{H}F_{k,n} &= k(F_{k,n+1}i_1 + F_{k,n+2}i_2 + F_{k,n+3}i_3 + F_{k,n+4}i_4) \\ &\quad + (F_{k,n}i_1 + F_{k,n+1}i_2 + F_{k,n+2}i_3 + F_{k,n+3}i_4) \\ &= (kF_{k,n+1} + F_{k,n})i_1 + (kF_{k,n+2} + F_{k,n+1})i_2 + (kF_{k,n+3} + F_{k,n+2})i_3 \\ &\quad + (kF_{k,n+4} + F_{k,n+3})i_4 \end{aligned}$$

k -Fibonacci dizisinin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

$$\check{H}F_{k,n+2} = k\check{H}F_{k,n+1} + \check{H}F_{k,n}$$

eşitliği elde edilmiştir.

v. Hiperbolik k -Lucas kuaterniyonların Binet formülü ve binom toplam formüllerinin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i \check{H}L_{k,i} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i \overline{x_1} x_1^i + \overline{x_2} x_2^i \\ &= \overline{x_1} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i x_1^i + \overline{x_2} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i x_2^i \\ &= \overline{x_1} (1 + kx_1)^n + \overline{x_2} (1 + kx_2)^n. \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$1 + kx_1 = x_1^2, 1 + kx_2 = x_2^2 \text{ ve } \check{H}CL_n = \overline{x_1} x_1^n + \overline{x_2} x_2^n$$

bağıntıları kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i \check{H}L_{k,i} = \overline{x_1} x_1^{2n} + \overline{x_2} x_2^{2n} = \check{H}L_{k,2n}.$$

istenilen eşitlik elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer ispatlar hiperbolik k -Fibonacci kuaterniyonların tanımı, Binet formülleri ve k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak gösterilir.

Teorem 3.1.4.2. $k \in \mathbb{R}$ ve $n, t \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Godase, 2023):

- i. $2\check{H}F_{k,n+t} = F_{k,n}\check{H}L_{k,t} - L_{k,n}\check{H}F_{k,t},$
- ii. $2\check{H}L_{k,n+t} = L_{k,n}\check{H}L_{k,t} + (k^2 + 4)F_{k,n}\check{H}F_{k,t},$
- iii. $2(-1)^t\check{H}F_{k,n-t} = \check{H}F_{k,n}L_{k,t} - \check{H}L_{k,n}F_{k,t},$
- iv. $2(-1)^t\check{H}L_{k,n-t} = \check{H}L_{k,n}L_{k,t} - (k^2 + 4)\check{H}F_{k,n}F_{k,t}.$

İspat. i. Hiperbolik k -Fibonacci kuaterniyonları, hiperbolik k -Lucas kuaterniyonları, k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} F_{k,n}\check{H}L_{k,t} - L_{k,n}\check{H}F_{k,t} &= \left(\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}\right)(\bar{x}_1x_1^t + \bar{x}_2x_2^t) - (x_1^n + x_2^n)\left(\frac{\bar{x}_1x_1^t - \bar{x}_2x_2^t}{x_1 - x_2}\right) \\ &= 2\frac{\bar{x}_1x_1^{n+t} - \bar{x}_2x_2^{n+t}}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$2\check{H}F_{k,n+t} = F_{k,n}\check{H}L_{k,t} - L_{k,n}\check{H}F_{k,t}$$

olup istenilen eşitlik elde edilmiştir.

Diğer ispatlar da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.1.4.3. $k \in \mathbb{R}$ ve $n, t \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Godase, 2023):

- i. $\check{H}F_{k,n}L_{k,t} = (-1)^t\check{H}F_{k,n-t} + \check{H}F_{k,n+t},$
- ii. $\check{H}L_{k,n}L_{k,t} = (-1)^t\check{H}L_{k,n-t} + \check{H}L_{k,n+t}.$

İspat. i. Hiperbolik k -Fibonacci kuaterniyonları ve k -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\check{H}F_{k,n}L_{k,t} = \left(\frac{\bar{x}_1x_1^n - \bar{x}_2x_2^n}{x_1 - x_2}\right)(x_1^t + x_2^t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\overline{x_1}x_1^{n+t} - \overline{x_2}x_2^{n+t} + \overline{x_1}x_1^n x_2^t - \overline{x_2}x_2^n x_1^t}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{\overline{x_1}x_1^{n+t} - \overline{x_2}x_2^{n+t}}{x_1 - x_2} + \frac{x_1^t x_2^t (\overline{x_1}x_1^{n-t} - \overline{x_2}x_2^{n-t})}{x_1 - x_2}.
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikten

$$\check{H}F_{k,n}L_{k,t} = (-1)^t \check{H}F_{k,n-t} + \check{H}F_{k,n+t}$$

eşitliği elde edilmiştir.

ii. Hiperbolik k -Lucas kuaterniyonları ve k -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\check{H}L_{k,n}L_{k,t} &= (\overline{x_1}x_1^n + \overline{x_2}x_2^n)(x_1^t + x_2^t) \\
&= \overline{x_1}x_1^{n+t} + \overline{x_2}x_2^{n+t} + \overline{x_1}x_1^n x_2^t + \overline{x_2}x_2^n x_1^t \\
&= \overline{x_1}x_1^{n+t} + \overline{x_2}x_2^n x_1^t + x_1^t x_2^t (\overline{x_1}x_1^{n-t} + \overline{x_2}x_2^{n-t})
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikten

$$\check{H}L_{k,n}L_{k,t} = (-1)^t \check{H}L_{k,n-t} + \check{H}L_{k,n+t}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

3.2. k -Jacobsthal-Lucas yapısı ile dönüşüm uygulaması

Bu başlık altında k -Jacobsthal-Lucas dizisi tanımlanmıştır. Ayrıca, bu dizinin terimleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak da k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Catalan dönüşümü tanımlanmıştır.

3.2.1. k -Jacobsthal-Lucas dizisi

Tanım 3.2.1.1. İlk iki terimi $j_{k,0} = 2$ ve $j_{k,1} = 1$ olmak üzere

$$j_{k,n+2} = j_{k,n+1} + 2kj_{k,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye k -Jacobsthal-Lucas dizisi denir (Akkuş vd., 2021).

Bu bağıntıda $k = 1$ alındığında bilinen Jacobsthal-Lucas sayıları elde edilmiştir. k -Jacobsthal-Lucas dizisinin karakteristik denklemi,

$$y^2 - y - 2k = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri;

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \text{ ve } y_2 = \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2}$$

elde edilmiştir. Karakteristik denklemin kökleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanmıştır:

$$y_1 + y_2 = 1, y_1 y_2 = -2k, y_1 - y_2 = \sqrt{1+8k} \text{ ve } y_1^2 + y_2^2 = 1 + 4k.$$

Ek olarak k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Binet formülü ise,

$$j_{k,n} = y_1^n + y_2^n \quad (3.5)$$

biçiminde elde edilmiştir (Akkuş vd., 2021).

Aşağıda bazı k -Jacobsthal-Lucas dizisinin terimleri verilmiştir (Akkuş vd., 2021):

- $j_{k,0} = 2,$
- $j_{k,1} = 1,$
- $j_{k,2} = 4k + 1,$
- $j_{k,3} = 6k + 1,$
- $j_{k,4} = 8k^2 + 8k + 1,$
- $j_{k,5} = 20k^2 + 10k + 1,$
- $j_{k,6} = 16k^3 + 36k^2 + 12k + 1.$

Ek olarak k - Jacobsthal-Lucas dizisi ile ilgili bazı önemli özellikler aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.2.1.1. $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Akkuş vd., 2021):

- i. $j_{k,n} = (-2k)^n j_{k,-n},$
- ii. (Cassini Özdeşliği) $j_{k,n-1} j_{k,n+1} - j_{k,n}^2 = (-2k)^{n-1} (8k + 1).$

İspat. ii. k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} j_{k,n-1} j_{k,n+1} - j_{k,n}^2 &= (y_1^{n-1} + y_2^{n-1})(y_1^{n+1} + y_2^{n+1}) - (y_1^n + y_2^n)(y_1^n + y_2^n) \\ &= y_1^{n-1} y_2^{n+1} + y_2^{n-1} y_1^{n+1} - 2y_1^n y_2^n \end{aligned}$$

$$= y_1^n y_2^n \left(\frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2} - 2 \right)$$

eşitlikleri elde edilmiştir. Son eşitlikten k -Jacobsthal-Lucas dizisinin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa

$$j_{k,n-1}j_{k,n+1} - j_{k,n}^2 = (-2k)^{n-1}(8k + 1)$$

istenilen elde edilmiştir ve böylece ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilir.

3.2.2. k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Catalan dönüşümü

k -Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümü olan

$$CF_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} F_{k,i}, \quad n \in \mathbb{N}$$

dönüşümü kullanılarak k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Catalan dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.2.1. k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Catalan dönüşümü $Cj_{k,n}$ ile gösterelim. Böylece

$$Cj_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} j_{k,i}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Akkuş vd., 2021).

Bu dönüşüm yardımıyla Catalan k -Jacobsthal-Lucas dizisinin terimleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Akkuş vd., 2021):

- $Cj_{k,1} = \sum_{i=0}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} j_{k,i} = j_{k,1} = 1,$
- $Cj_{k,2} = \sum_{i=0}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} j_{k,i} = \frac{1}{3} \binom{3}{1} j_{k,1} + \binom{2}{0} j_{k,2} = 4k + 2,$
- $Cj_{k,3} = \sum_{i=0}^3 \frac{i}{6-i} \binom{6-i}{3-i} j_{k,i} = 14k + 5,$
- $Cj_{k,4} = \sum_{i=0}^4 \frac{i}{8-i} \binom{8-i}{4-i} j_{k,i} = 8k^2 + 46k + 14,$
- $Cj_{k,5} = \sum_{i=0}^5 \frac{i}{10-i} \binom{10-i}{5-i} j_{k,i} = 52k^2 + 152k + 42,$
- $Cj_{k,6} = \sum_{i=0}^6 \frac{i}{12-i} \binom{12-i}{6-i} j_{k,i} = 16k^3 + 268k^2 + 512k + 132.$

Bulunan $Cj_{k,n}$ dizisi C Catalan üçgen matrisi ve $n \times 1$ boyutlu $j_{k,n}$ matrisinin çarpımı olarak da yazılmıştır. Yani

$$\begin{bmatrix} Cj_{k,1} \\ Cj_{k,2} \\ Cj_{k,3} \\ Cj_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots \\ 1 & 1 & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{k,1} \\ j_{k,2} \\ j_{k,3} \\ j_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4k+2 \\ 14k+5 \\ 8k^2+46k+14 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots \\ 1 & 1 & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4k+1 \\ 6k+1 \\ 8k^2+8k+1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilmiştir.

3.2.3. Catalan k -Jacobsthal-Lucas dizisinin Hankel dönüşümü

k -Jacobsthal-Lucas dizisine Catalan dönüşümü uygulandıktan sonra bulunan $Cj_{k,n}$ terimlerine Hankel dönüşümü uygulanırsa;

- $HCj_{k,1} = \det[1] = 1,$
- $HCj_{k,2} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4k+2 \\ 4k+2 & 14k+5 \end{bmatrix} = -16k^2 - 2k + 1,$
- $HCj_{k,3} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4k+2 & 14k+5 \\ 4k+2 & 14k+5 & 8k^2+16k+14 \\ 14k+5 & 8k^2+16k+14 & 52k^2+152k+42 \end{bmatrix}$
 $= -384k^4 - 3232k^3 + 2024k^2 + 2282k - 255,$

sonuçları elde edilmiştir (Akkuş vd., 2021).

4. BULGULAR

Bu bölümde Bakır Fibonacci ve k -Oresme dizilerinin tanımı, özellikleri, Catalan dönüşümleri ve hiperbolik kuaterniyonlar üzerine uygulamaları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

4.1. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas Yapıları ile Dönüşüm ve Kuaterniyon Uygulamaları

Bu başlık altında her terimi kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olarak ilerleyen klasik Fibonacci dizisinin yeni bir genellemesi olan ve limit durumunda metalik oranlardan bakır oranı değerini veren Bakır Fibonacci dizisi tanımlanmıştır. Bu dizinin tekrarlama bağıntısından yararlanılarak Bakır Lucas dizisi türetilmiştir. Her iki dizinin karakteristik denklemleri ve kökleri bulunarak derin matematiksel ilişkiler kurulmuş; kapalı formülleri, üreteç fonksiyonları ve binom toplam formülleri ayrıntılı şekilde incelenmiştir. Ayrıca bu diziler için Cassini, Catalan, d'Ocagne ve Vajda gibi kritik matematiksel özdeşlikler doğrulanmış ve elde edilen özgün bulgular literatüre kazandırılmıştır. Ek olarak, bu dizilere Catalan dönüşümü uygulanmış, elde edilen yeni diziler Hankel dönüşümüne tabi tutularak orijinal determinant yapıları elde edilmiştir. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin son aşamada dört boyutlu hiperkompleks sayı sistemlerinden olan hiperbolik kuaterniyonlara uygulamaları yapılarak; eşlenik, norm, Binet formülleri ve özel özdeşlikleri sistematik olarak hesaplanmıştır.

4.1.1. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizileri

Tanım 4.1.1.1. İlk iki terimi $BF_0 = 0$, $BF_1 = 1$ olan ve

$$BF_{n+2} = 4BF_{n+1} + BF_n, n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye Bakır Fibonacci dizisi denir (Özkan ve Akkuş, 2024b).

Bakır Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimi şu şekilde bulunmuştur:

$$0, 1, 4, 17, 72, 305, 1292, 5473, 23184, 98209, \dots$$

Tanım 4.1.1.2. İlk iki terimi $BL_0 = 2$, $BL_1 = 4$ olan ve

$$BL_{n+2} = 4BL_{n+1} + BL_n, n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlana diziye Bakır Lucas dizisi denir (Özkan ve Akkuş, 2024b).

Bakır Lucas dizisinin bazı terimleri şu şekilde sıralanmıştır:

$$2, 4, 18, 76, 322, 1364, 5778, 24476, 103682, \dots$$

Bu bilgilere göre Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$r^2 - 4r - 1 = 0 \quad (4.3)$$

şeklinde olup bu denklemin kökleri ise;

$$\kappa = 2 + \sqrt{5} \cong 4.23606797749979 \dots \text{ ve } \theta = 2 - \sqrt{5}$$

olarak elde edilmiştir. Buradaki κ sayısı metalik oranlardan bakır orandır. Ayrıca Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin terimlerini aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da (Kapalı Form) elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş 2024b):

- $BF_n = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} 4^{n-1-2q},$
- $BL_n = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-q} \binom{n-q}{q} 4^{n-2q}.$

Aşağıdaki teoremlerde Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizileri ayrıntılı bir şekilde ele alınmış, bu dizilerin temel özellikleri, aralarındaki matematiksel ilişkiler ve birbirleriyle olan bağlantıları incelenmiştir. Ayrıca söz konusu dizilerin birbirinden nasıl türetilbildiği ve bazı önemli özdeşlikler aracılığıyla aralarındaki yapısal benzerlikler ortaya konulmuştur.

Teorem 4.1.1.1. (Binet formülleri) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Binet formülleri aşağıdaki gibi ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b):

i. $BF_n = \frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta},$

ii. $BL_n = \kappa^n + \theta^n.$

İspat. i. Bakır Fibonacci dizisinin Binet formülünün elde edilmesinde, ikinci dereceden doğrusal tekrarlama bağıntıları için tanımlanan genel Binet formu kullanılmıştır:

$$BF_n = S\kappa^n + T\theta^n. \quad (4.4)$$

Buradaki S ve T reel sayıları dizinin başlangıç değerlerine bağlı olarak elde edilen denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilmiştir. $n = 0$ ve $n = 1$ için elde edilen denklem sistemi çözüldüğünde $S = \frac{1}{\kappa - \theta}$ ve $T = \frac{-1}{\kappa - \theta}$ elde edilmiştir. Böylece bu bilgilere göre Bakır Fibonacci dizisinin Binet formülü

$$BF_n = \frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta}.$$

şeklinde elde edilmiştir.

Bakır Lucas dizisinin Binet formülü de benzer şekilde bulunur.

Aşağıdaki teoremlerde, Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizileri ile bu dizilerin karakteristik denkleminin kökleri arasındaki ilişkileri incelenmiştir. Bu dizilerin karakteristik denkleminin kökleri ile dizilerin terimleri arasındaki ilişkiden elde edilen bağıntıların her iki kökte de sağlandığı elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1.2. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin ardışık iki teriminin büyük olanının küçük olanına oranı metalik oranlardan bakır oranına yakınsamıştır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BF_{n+1}}{BF_n} = \kappa \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BL_{n+1}}{BL_n} = \kappa.$$

İspat. Bakır Fibonacci dizisinin Binet formülü kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BF_{n+1}}{BF_n} = \frac{\frac{\kappa^{n+1} - \theta^{n+1}}{\kappa - \theta}}{\frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa^{n+1} (1 - (\frac{\theta}{\kappa})^{n+1})}{\kappa^n (1 - (\frac{\theta}{\kappa})^n)}.$$

Son eşitlikten limit özellikleri kullanılarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BF_{n+1}}{BF_n} = \kappa$$

olup istenilen elde edilmiştir.

Bakır Lucas dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BL_{n+1}}{BL_n} = \kappa$$

eşitliği de benzer şekilde bulunmuştur.

Teorem 4.1.1.3. $n \in \mathbb{N}$ üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } \kappa^{2n} = \frac{BF_{2n}}{2} \kappa \sqrt{5} - \frac{BL_{2n-1}}{4},$$

$$\text{ii. } \theta^{2n} = \frac{BF_{2n}}{2} (2\sqrt{5} - \kappa) \sqrt{5} - \frac{BL_{2n-1}}{4},$$

$$\text{iii. } \kappa^{2n+1} = -\frac{BF_{2n}}{2} \sqrt{5} + \kappa \frac{BL_{2n+1}}{4},$$

$$\text{iv. } \theta^{2n+1} = -\frac{BF_{2n}}{2}\sqrt{5} - \theta \frac{BL_{2n+1}}{4},$$

$$\text{v. } 2\sqrt{5}BF_n + BL_n = 2\kappa^n,$$

$$\text{vi. } 2\sqrt{5}BF_n - BL_n = -2\theta^n.$$

İspat. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{i. } \frac{BF_{2n}}{2}\kappa\sqrt{5} - \frac{BL_{2n-1}}{4} &= 2\kappa\sqrt{5} \frac{\kappa^{2n}-\theta^{2n}}{(\kappa-\theta)^4} - \frac{\kappa^{2n-1}+\theta^{2n-1}}{4} \\ &= \frac{\kappa^{2n+1}-\kappa\theta^{2n}-\kappa^{2n-1}-\theta^{2n-1}}{4} \\ &= \frac{\kappa^{2n}(\kappa-\frac{1}{\kappa})+\theta^{2n}(-\kappa-\frac{1}{\theta})}{4} \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$\theta = -\frac{1}{\kappa}, \kappa = -\frac{1}{\theta} \text{ ve } \kappa + \theta = 4$$

bağıntıları kullanılarak

$$\kappa^{2n} = \frac{BF_{2n}}{2}\kappa\sqrt{5} - \frac{BL_{2n-1}}{4}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{ii. } \frac{BF_{2n}}{2}(2\sqrt{5}-\kappa)\sqrt{5} - \frac{BL_{2n-1}}{4} &= \frac{\kappa^{2n}-\theta^{2n}}{(\kappa-\theta)^4}(2\sqrt{5}-\kappa)2\sqrt{5} - \frac{\kappa^{2n-1}+\theta^{2n-1}}{4} \\ &= \frac{-\kappa^{2n}\theta+\theta^{2n+1}-\kappa^{2n-1}-\theta^{2n-1}}{4} \\ &= \frac{\kappa^{2n}(-\theta-\frac{1}{\kappa})+\theta^{2n}(\theta-\frac{1}{\theta})}{4} \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$\theta = -\frac{1}{\kappa}, \kappa = -\frac{1}{\theta} \text{ ve } \kappa + \theta = 4$$

özellikleri kullanılarak

$$\theta^{2n} = \frac{BF_{2n}}{2}(2\sqrt{5}-\kappa)\sqrt{5} - \frac{BL_{2n-1}}{4}$$

istenilen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.1.1.4. $s = \kappa$ ya da $s = \theta$ ve $n, m, p, r \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024b):

i. $s^n = sBF_n + BF_{n-1}$,

ii. $BF_{n(m-p)} = s^{np}BF_{nm} + s^{nm}BF_{np}$,

iii. $s^{2n} = s^nBL_n - (-1)^n$,

iv. $s^n = s^mBF_{n-m+1} + s^{m-1}BF_{n-m}$,

v. $s^{nr} = \frac{s^nBF_{nr}}{BF_n} - (-1)^n \frac{BF_{n(r-1)}}{BF_n}$,

vi. $s^{2(2^{n+1})}BL_{2^{n+1}} = 1 + 4s + s^{2(2^{n+1}+1)}$.

İspat. i. Bakır Fibonacci dizisinin Binet formülü ve bu dizinin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$s = \kappa$ için

$$sBF_n + BF_{n-1} = \kappa \left(\frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta} \right) + \left(\frac{\kappa^{n-1} - \theta^{n-1}}{\kappa - \theta} \right) = \frac{\kappa^{n-1}(\kappa^2 + 1) - \theta^{n-1}(\kappa\theta + 1)}{\kappa - \theta} = \kappa^n.$$

$s = \theta$ için

$$sBF_n + BF_{n-1} = \theta \left(\frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta} \right) + \left(\frac{\kappa^{n-1} - \theta^{n-1}}{\kappa - \theta} \right) = \frac{\kappa^{n-1}(\kappa\theta + 1) - \theta^{n-1}(\theta^2 + 1)}{\kappa - \theta} = \theta^n.$$

Son denklemden istenen elde edilmiştir.

iii. Bakır Lucas dizisinin Binet formülü ve bu dizinin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$s = \kappa$ için

$$s^nBL_n - (-1)^n = \kappa^n(\kappa^n + \theta^n) - (\kappa\theta)^n = \kappa^{2n}.$$

$s = \theta$ için

$$s^nBL_n - (-1)^n = \theta^n(\kappa^n + \theta^n) - (\kappa\theta)^n = \theta^{2n}.$$

Son denklemden istenen elde edilmiştir.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizileri arasındaki özel ilişkiler verilmiştir.

Teorem 4.1.1.5. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } BF_n = \frac{1}{10}BL_{n+1} - \frac{1}{5}BL_n,$$

$$\text{ii. } BL_n = 2BF_{n+1} - 4BF_n.$$

İspat. i. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}BL_{n+1} - \frac{1}{5}BL_n &= \frac{1}{10}(\kappa^{n+1} + \theta^{n+1}) - \frac{1}{5}(\kappa^n + \theta^n) \\ &= \frac{1}{10}[\kappa^n(\kappa - 2) - \theta^n(2 - \theta)] \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$2 - \theta = \sqrt{5}, \kappa - 2 = \sqrt{5} \text{ ve } \kappa - \theta = 2\sqrt{5}$$

karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak

$$BF_n = \frac{1}{10}BL_{n+1} - \frac{1}{5}BL_n$$

istenilen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.1.1.6. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } BF_{n+m+1} = BF_{n+1}BF_{m+1} + BF_nBF_m,$$

$$\text{ii. } BL_{n+m+1} = BL_{m+1}BF_{n+1} + BL_mBF_n,$$

$$\text{iii. } BF_n^2 = \frac{1}{20}BL_{2n} + \frac{1}{10}\frac{BF_n}{BF_{-n}},$$

$$\text{iv. } BL_n^2 = BL_{2n} + 2\frac{BL_n}{BL_{-n}},$$

$$\text{v. } BL_n^2 + BL_{n+1}^2 = BL_{2n} + BL_{2n+2},$$

$$\text{vi. } BF_n^2 + BF_{n+1}^2 = BF_{2n+1}.$$

İspat. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\text{i. } BF_{n+1}BF_{m+1} + BF_nBF_m = \frac{\kappa^{n+1}-\theta^{n+1}}{\kappa-\theta} \frac{\kappa^{m+1}-\theta^{m+1}}{\kappa-\theta} + \frac{\kappa^n-\theta^n}{\kappa-\theta} \frac{\kappa^m-\theta^m}{\kappa-\theta}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\kappa^{n+m+1}(\kappa-\theta) - \theta^{n+m+1}(\kappa-\theta)}{(\kappa-\theta)^2} \\
&= \frac{\kappa^{n+m+1} - \theta^{n+m+1}}{\kappa-\theta} \\
&= CF_{n+m+1}.
\end{aligned}$$

iii. $BF_{-n} = \frac{\kappa^{-n} - \theta^{-n}}{\kappa - \theta} = -\frac{\kappa^n - \theta^n}{(\kappa - \theta)\kappa^n \theta^n} = -\frac{BF_n}{\kappa^n \theta^n}$. Buradan

$$\kappa^n \theta^n = -\frac{BF_{-n}}{BF_n}$$

bulunmuştur. Daha sonra

$$BF_n^2 = \frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta} \frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta} = \frac{\kappa^{2n} + \theta^{2n} - 2\kappa^n \theta^n}{(\kappa - \theta)(\kappa - \theta)} = \frac{1}{20} BL_{2n} - \frac{1}{10} \kappa^n \theta^n.$$

eşitliği ile beraber değerlendirilirse

$$BF_n^2 = \frac{1}{20} BL_{2n} + \frac{1}{10} \frac{BF_n}{BF_{-n}}$$

istenilen elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{v. } BL_n^2 + BL_{n+1}^2 &= (\kappa^n + \theta^n)(\kappa^n + \theta^n) + (\kappa^{n+1} + \theta^{n+1})(\kappa^{n+1} + \theta^{n+1}) \\
&= (\kappa^{2n} + \theta^{2n}) + (\kappa^{2n+2} + \theta^{2n+2}) + 2\kappa^n \theta^n + 2\kappa^{n+1} \theta^{n+1} \\
&= BL_{2n} + BL_{2n+2} + 2(-1)^n + 2(-1)^{n+1} \\
&= BL_{2n} + BL_{2n+2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin özel toplam formülleri ve binom toplam formülleri üzerine çalışma yapılmıştır.

Teorem 4.1.1.7. $m, n, p, r \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } \sum_{m=0}^n BF_{rm+p} = \begin{cases} \frac{-BF_{nr+r+p} + (-1)^r BF_{nr+p} + BF_{r-p} + BF_p}{1 + (-1)^r - BL_r}, & p < r \\ \frac{-BF_{nr+r+p} + (-1)^r BF_{nr+p} + BF_{p-r} + BF_p}{1 + (-1)^r - BL_r}, & \text{diğer} \end{cases},$$

$$\text{ii. } \sum_{m=0}^n BL_{rm+p} = \begin{cases} \frac{-BL_{nr+r+p}+(-1)^r BL_{nr+p}-BL_{r-p}+BL_p}{1+(-1)^r-BL_r}, & p < r \\ \frac{(-1)^r BL_{nr+p}-BL_{p-r}+BL_p-BL_{nr+r+p}}{1+(-1)^r-BL_r}, & \text{diğer} \end{cases}.$$

İspat. i. Bakır Fibonacci dizisinin Binet formülü, geometrik seriler ve karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n BF_{rm+p} &= \sum_{y=0}^n \frac{\kappa^{rm+p}-\theta^{rm+p}}{\kappa-\theta} = \frac{\kappa^p}{\kappa-\theta} \sum_{y=0}^n (\kappa^r)^m - \frac{\theta^p}{\kappa-\theta} \sum_{y=0}^n (\theta^r)^m \\ &= \frac{\kappa^p}{\kappa-\theta} \frac{\kappa^{nr+r}-1}{\kappa^r-1} - \frac{\theta^p}{\kappa-\theta} \frac{\theta^{nr+r}-1}{\theta^r-1} \\ &= \begin{cases} \frac{-BF_{nr+r+p}+(-1)^r BF_{nr+p}+BF_{r-p}+BF_p}{1+(-1)^r-BL_r}, & p < r \\ \frac{-BF_{nr+r+p}+(-1)^r BF_{nr+p}+BF_{p-r}+BF_p}{1+(-1)^r-BL_r}, & \text{diğer} \end{cases}. \end{aligned}$$

Böylece istenen elde edilmiş olup ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 4.1.1.1. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin ardışık, tek ve çift indisli terimlerinin toplamı aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\begin{aligned} \text{i. } \sum_{m=0}^n BF_m &= \frac{5BF_n+BF_{n-1}-1}{4}, \\ \text{ii. } \sum_{m=0}^n BL_m &= \frac{5BL_n+BL_{n-1}+2}{4}, \\ \text{iii. } \sum_{m=0}^n BF_{2m} &= \frac{BF_{2n+2}-BF_{2n}-BF_2}{16}, \\ \text{iv. } \sum_{m=0}^n BL_{2m} &= \frac{BL_{2n+2}-BL_{2n}+BL_2-2}{16}, \\ \text{v. } \sum_{m=0}^n BF_{2m+1} &= \frac{BF_{2n+3}-BF_{2n+1}-2}{16}, \\ \text{vi. } \sum_{m=0}^n BL_{2m+1} &= \frac{BL_{2n+3}-BL_{2n+1}}{16}. \end{aligned}$$

İspat. Teorem 4.1.1.7., bilgileri kullanılarak elde edilir.

Teorem 4.1.1.8. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 4^j BF_j = BF_{2n},$$

$$\text{ii. } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 4^j BL_j = BL_{2n},$$

$$\text{iii. } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j BF_{2j} = (-4)^n BF_n,$$

$$\text{iv. } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j BL_{2j} = (-4)^n BL_n.$$

İspat. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\kappa^2 = 4\kappa + 1 \text{ ve } \theta^2 = 4\theta + 1.$$

Bu bilgilere göre

$$\begin{aligned} \text{i. } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 4^j BF_j &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 4^j \left(\frac{\kappa^j - \theta^j}{\kappa - \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa - \theta} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 4^j \kappa^j - \frac{1}{\kappa - \theta} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 4^j \theta^j \\ &= \frac{1}{\kappa - \theta} [(1 + 4\kappa)^n - (1 + 4\theta)^n] \\ &= \frac{1}{\kappa - \theta} [(\kappa^2)^n - (\theta^2)^n] \\ &= BF_{2n}. \end{aligned}$$

Son eşitlikten istenen elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{iv. } \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j BL_{2j} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (\kappa^{2j} + \theta^{2j}) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \kappa^{2j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \theta^{2j} \\ &= (1 - \kappa^2)^n + (1 - \theta^2)^n \\ &= (-4\kappa)^n + (-4\theta)^n \\ &= (-4)^n (\kappa^n + \theta^n) \\ &= (-4)^n BL_n. \end{aligned}$$

Son eşitlikten istenen elde edilmiştir.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin özel üreteç fonksiyonları üzerine çalışma yapılmıştır.

Teorem 4.1.1.9. $r, n, p \in \mathbb{N}$ ve $p > r$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } \sum_{n=0}^{\infty} BF_{rn+p} x^n = \frac{BF_p - x(-1)^r BF_{p-r}}{1 - xBL_r + (-1)^r x^2},$$

$$\text{ii. } \sum_{n=0}^{\infty} BL_{rn+p} x^n = \frac{BL_p - x(-1)^r BL_{p-r}}{1 - xBL_r + (-1)^r x^2},$$

$$\text{iii. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{BF_{rn}}{n!} x^n = \frac{e^{\kappa^r x} - e^{\theta^r x}}{\kappa - \theta},$$

$$\text{iv. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{BL_{rn}}{n!} x^n = e^{\kappa^r x} + e^{\theta^r x}.$$

İspat. Bakır Fibonacci, Bakır Lucas dizilerinin Binet formülleri, bu dizinin karakteristik denkleminin özellikleri ve geometrik serilerin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{i. } \sum_{n=0}^{\infty} BF_{rn+p} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{rn+p} - \theta^{rn+p}}{\kappa - \theta} x^n \\ &= \frac{\kappa^p}{\kappa - \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa^r x)^n - \frac{\theta^p}{\kappa - \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^r x)^n \\ &= \frac{\kappa^p}{\kappa - \theta} \frac{1}{1 - \kappa^r x} - \frac{\theta^p}{\kappa - \theta} \frac{1}{1 - \theta^r x} \\ &= \frac{BF_p - x(-1)^r BF_{p-r}}{1 - xBL_r + (-1)^r x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{BL_{rn}}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^{rn} + \theta^{rn}}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa^r x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta^r x)^n}{n!} \\ &= e^{\kappa^r x} + e^{\theta^r x}. \end{aligned}$$

Son eşitlikten istenen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 4.1.1.2. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin özel üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } BF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} BF_n x^n = \frac{x}{1 - 4x - x^2},$$

$$\text{ii. } BL(x) = \sum_{n=0}^{\infty} BL_n x^n = \frac{2 - 4x}{1 - 4x - x^2}.$$

İspat. Teorem 4.1.1.9., bilgileri kullanılarak elde edilir.

Aşağıdaki teoremden Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin özel özdeşlikleri üzerine hesaplamalar yapılmıştır.

Teorem 4.1.1.10. $n, i, j \in \mathbb{N}$ ve $i, j < n$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur: (Özkan ve Akkuş, 2024b):

i. Cassini Özdeşliği

- $BF_{n+1}BF_{n-1} - BF_n^2 = (-1)^n,$
- $BL_{n+1}BL_{n-1} - BL_n^2 = 20(-1)^{n-1}.$

ii. Catalan Özdeşliği

- $BF_{n+i}BF_{n-i} - BF_n^2 = (-1)^{n-i+1}BF_i^2,$
- $BL_{n+i}BL_{n-i} - BL_n^2 = 20(-1)^{n-i}BF_i^2.$

iii. d'Ocagne Özdeşliği

- $BF_{n+1}BF_i - BF_nBF_{i+1} = (-1)^{i+1}BF_{n-i},$
- $BL_{n+1}BL_i - BL_nBL_{i+1} = 20(-1)^iBF_{n-i}.$

iv. Vajda Özdeşliği

- $BF_{n+i}BF_{n+j} - BF_nBF_{n+i+j} = (-1)^nBF_iBF_j,$
- $BL_{n+i}BL_{n+j} - BL_nBL_{n+i+j} = 20(-1)^{n+1}BF_iBF_j.$

v. Halton Özdeşliği

- $BF_{n+i}BF_{n-i} - BF_{n+j}BF_{n-j} = \frac{1}{20}[(-1)^{n-j}BL_{2j} - (-1)^{n-i}BL_{2i}],$
- $BL_{n+i}BL_{n-i} - BL_{n+j}BL_{n-j} = (-1)^{n-i}BL_{2i} - (-1)^{n-j}BL_{2j}.$

vi. Padilla Özdeşliği

- $BF_{n+2}^3 + BF_{n-1}^3 - 3BF_nBF_{n+1}BF_{n+2} = \frac{1}{20}(BF_{3n+6} - 3BF_{3n+3} + BF_{3n-3} + 3BF_{2n+3} - 3BF_{n+2} + 3BF_{n+1}),$
- $BL_{n+2}^3 + BL_{n-1}^3 - 3BL_nBL_{n+1}BL_{n+2} = BL_{3n+6} + 3BL_{n+2} + BL_{3n-3} + 3BL_{n-1} + 20(-BF_{3n+3} - 3BF_{n-1} + 3BF_{n+1} + 3BF_{2n+3}).$

vi. Melham Özdeşliği

- $BF_{n+1}BF_{n+2}BF_{n+6} - BF_n^3 = \frac{1}{20}(BF_{3n+9} - BF_{3n} - \frac{1}{(-1)^{n+1}}BF_{n+7} - \frac{1}{(-1)^{n+2}}BF_{n+5}$
 $+ \frac{3}{(-1)^n}BF_n - \frac{1}{(-1)^{n+6}}BF_{n-3}),$
- $BL_{n+1}BL_{n+2}BL_{n+6} - BL_n^3 = BL_{3n+9} - BL_{3n} + \frac{1}{(-1)^{n+1}}BL_{k,n+7} + \frac{1}{(-1)^{n+2}}BL_{k,n+5}$
 $- \frac{3}{(-1)^n}BL_n + \frac{1}{(-1)^{n+6}}BL_{n-3}.$

vii. Gelin-Cesaro Özdeşliği

- $BF_{n+2}BF_{n+1}BF_{n-1}BF_{n-2} - BF_n^4 = \frac{1}{20}(\frac{1}{(-1)^{n-3}}BL_{2n+4} + \frac{1}{(-1)^{n-2}}BL_{2n+2} + \frac{1}{(-1)^{2n-3}}BL_6$
 $+ \frac{1}{(-1)^n}BL_{2n-2} + BL_2 + \frac{1}{(-1)^{n+1}}BL_{2n-4} + \frac{1}{(-1)^{n-3}}BL_{2n} - 90),$
- $BL_{n+2}BL_{n+1}BL_{n-1}BL_{n-2} - BL_n^4 = \frac{1}{(-1)^{n-2}}BL_{2n+4} + \frac{1}{(-1)^{n-1}}BL_{2n+2} + \frac{1}{(-1)^{2n-3}}BL_6$
 $+ \frac{1}{(-1)^{n+1}}BL_{2n-2} + \frac{18}{(-1)^{2n-1}} + \frac{1}{(-1)^{n+2}}BL_{2n-4} - \frac{1}{(-1)^{n-2}}BL_{2n} - 5.$

İspat. i. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir: Bakır Fibonacci dizisi için

$$\begin{aligned}
 BF_{n+1}BF_{n-1} - BF_n^2 &= \frac{\kappa^{n+1} - \theta^{n+1}}{\kappa - \theta} \frac{\kappa^{n-1} - \theta^{n-1}}{\kappa - \theta} - \frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta} \frac{\kappa^n - \theta^n}{\kappa - \theta} \\
 &= \frac{\kappa^{2n} - \kappa^{n+1}\theta^{n-1} - \theta^{n+1}\kappa^{n-1} + \theta^{2n}}{(\kappa - \theta)^2} - \frac{\kappa^{2n} - 2\kappa^n\theta^n + \theta^{2n}}{(\kappa - \theta)^2} \\
 &= \frac{(\kappa\theta)^{\frac{n-\kappa}{\theta}}}{(\kappa - \theta)^2} + \frac{(\kappa\theta)^{\frac{n-\theta}{\kappa}}}{(\kappa - \theta)^2} + \frac{2(\kappa\theta)^n}{(\kappa - \theta)^2} \\
 &= (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde Bakır Lucas dizisi için

$$\begin{aligned}
 BL_{n+1}BL_{n-1} - BL_n^2 &= (\kappa^{n+1} + \theta^{n+1})(\kappa^{n-1} + \theta^{n-1}) - (\kappa^n + \theta^n)(\kappa^n + \theta^n) \\
 &= \kappa^{2n} + \kappa^{n+1}\theta^{n-1} + \theta^{n+1}\kappa^{n-1} + \theta^{2n} - \kappa^{2n} - 2\kappa^n\theta^n - \theta^{2n} \\
 &= (\kappa\theta)^n(-\frac{\kappa}{\theta} - \frac{\theta}{\kappa} + 2) \\
 &= 20(-1)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Son eşitliklerden istenen elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

4.1.2. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Catalan dönüşümleri

Aşağıda Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Catalan dönüşümü tanımlanmıştır. Ardından bu dönüşümlerden elde edilen yeni dizilerin bazı temel özellikleri incelenmiş ve çeşitli bağıntıları ortaya konulmuştur.

Tanım 4.1.2.1. Bakır Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümü CBF_n ile gösterilmiştir. Böylece

$$CBF_n = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} BF_i, n \in \mathbb{N} \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024b).

Bu dönüşüm yardımıyla Bakır Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümünün bazı terimleri:

- $CBF_1 = \sum_{i=0}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} BF_i = 1,$
- $CBF_2 = \sum_{i=0}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} BF_i = 5,$
- $CBF_3 = 27,$
- $CBF_4 = 148,$
- $CBF_5 = 816,$
- $CBF_6 = 4501,$

şeklinde bulunmuştur. Bu dönüşümün terimlerini matrisler yardımıyla da gösterilmiştir. Yani,

$$\begin{bmatrix} CBF_1 \\ CBF_2 \\ CBF_3 \\ CBF_4 \\ CBF_5 \\ CBF_6 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BF_1 \\ BF_2 \\ BF_3 \\ BF_4 \\ BF_5 \\ BF_6 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiştir. Açık formatta yazarsak aşağıdaki eşitlik sağlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 27 \\ 148 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \dots \\ 1 & 1 & & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & & \dots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 17 \\ 72 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Tanım 4.1.2.2. Bakır Lucas dizisinin Catalan dönüşümü CBL_n ile gösterilmiştir. Böylece

$$CBL_n = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} BL_i, n \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024b).

Bu dönüşüm yardımıyla Bakır Lucas dizisinin Catalan dönüşümünün terimleri:

- $CBL_1 = \sum_{i=0}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} BL_i = 4,$
- $CBL_2 = \sum_{i=0}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} BL_i = 22,$
- $CBL_3 = 120,$
- $CBL_4 = 660,$
- $CBL_5 = 3644,$

şeklinde bulunmuştur. Bu dönüşümün terimlerini matrisler yardımıyla da gösterilmiştir. Yani,

$$\begin{bmatrix} CBL_1 \\ CBL_2 \\ CBL_3 \\ CBL_4 \\ CBL_5 \\ CBL_6 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BL_1 \\ BL_2 \\ BL_3 \\ BL_4 \\ BL_5 \\ BL_6 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Açık formatta yazarsak aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 22 \\ 120 \\ 660 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \dots \\ 1 & 1 & & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & & \dots \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 76 \\ 322 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Aşağıdaki teoremden Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Catalan dönüşümünün üreteç fonksiyonları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Teorem 4.1.2.1. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur: (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\text{i. } CBF(x) = \sum_{n=0}^{\infty} CBF_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{-3+2x+5\sqrt{1-4x}},$$

$$\text{ii. } CBL(x) = \sum_{n=0}^{\infty} CBL_n x^n = \frac{4\sqrt{1-4x}}{-3+2x+5\sqrt{1-4x}}.$$

İspat. i. $BF(x) = \frac{x}{1-4x-x^2}$ ve $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ sırasıyla Bakır Fibonacci ve Catalan dizilerinin üreteç fonksiyonlarıdır. Buna göre $BF(x * c(x))$ bileşke dönüşümü ile Bakır Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümünün üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Bu bilgilere göre

$$\begin{aligned} CBF(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} CBF_n x^n = BF(x * c(x)) \\ &= \frac{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}{1-4\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{-3+2x+5\sqrt{1-4x}} \end{aligned}$$

elde edilmiştir. Benzer şekilde Bakır Lucas dizisinin Catalan dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$CBL(x) = \sum_{n=0}^{\infty} CBL_n x^n = \frac{4\sqrt{1-4x}}{-3+2x+5\sqrt{1-4x}}$$

şeklinde bulunmuştur.

4.1.3. Catalan Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin Hankel dönüşümleri

Aşağıda Bakır Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümü sonucu elde edilen dizilerin terimleri kullanılarak Hankel matrisleri oluşturulmuş ve bu matrislerin determinantları incelenerek dikkat çekici bir özel sonuca ulaşılmıştır.

Catalan Bakır Fibonacci dizisinin Hankel dönüşümü $HCBF_n$ ile gösterilmiştir. Hankel dönüşüm matrisinin tanımına göre;

- $HCBF_1 = \det[CBF_1] = \det[1] = 1,$
- $HCBF_2 = \det \begin{bmatrix} CBF_1 & CBF_2 \\ CBF_2 & CBF_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 27 \end{bmatrix} = 2,$
- $HCBF_3 = \det \begin{bmatrix} CBF_1 & CBF_2 & CBF_3 \\ CBF_2 & CBF_3 & CBF_4 \\ CBF_3 & CBF_4 & CBF_5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 27 \\ 5 & 27 & 148 \\ 27 & 148 & 816 \end{bmatrix} = 5,$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad HCBF_4 &= \det \begin{bmatrix} CBF_1 & CBF_2 & CBF_3 & CBF_4 \\ CBF_2 & CBF_3 & CBF_4 & CBF_5 \\ CBF_3 & CBF_4 & CBF_5 & CBF_6 \\ CBF_4 & CBF_5 & CBF_6 & CBF_7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 27 & 148 \\ 5 & 27 & 148 & 816 \\ 27 & 148 & 816 & 4501 \\ 148 & 816 & 4501 & 24843 \end{bmatrix} \\
&= 13,
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b).

Aşağıdaki teoremden Bakır Fibonacci dizisinin Catalan dönüşümlerinin terimlerine Hankel dönüşümü uygulandığında elde edilen ilginç bir sonuç verilmiştir.

Teorem 4.1.3.1. $n \in \mathbb{N}$ ve F_n klasik Fibonacci dizisi olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlik doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$HCBF_n = F_{2n-1}.$$

İspat. $HCBF_n \neq 0$ ve $HCBF_n = \det A_n \det B_n$ şeklinde ifade edilmiştir. Buradaki A_n ve B_n matrislerinin özellikleri aşağıdaki gibi verilmiştir. Matrislerdeki ayrıştırma metodu kullanılırsa

- A_n matrisi, esas köşegeni $\{1, 1, 1, \dots\}$ ve ilk sütunu $\{CBF_1, CBF_2, CBF_3, \dots\}$ olan $n \times n$ tipinde alt üçgen matris olarak elde edilmiştir.
- B_n matrisi, esas köşegeni $\{1, 2, \frac{5}{2}, \frac{13}{5}, \frac{34}{13}, \frac{89}{34}, \dots\}$ ve ilk satırı $\{CBF_1, CBF_2, CBF_3, \dots\}$ olan $n \times n$ tipinde üst üçgen matris olarak elde edilmiştir.

Bu bilgilere göre

$$HCBF_n = \det \begin{bmatrix} CBF_1 = 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CBF_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ CBF_3 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ CBF_4 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} CBF_1 = 1 & CBF_2 & CBF_3 & CBF_4 & \dots \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{5} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

bulunmuştur. Böylece

$$\begin{aligned}
HCBF_n &= \det A_n \det B_n = \det B_n = \{b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} \dots b_{nn}\} \\
&= \{1, 2, 5, 13, 34, 89, \dots\} \\
&= F_{2n-1}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmıştır.

Benzer şekilde Catalan Bakır Lucas dizisinin terimlerine de Hankel dönüşümü uygulanmıştır. Bu dönüşüm $HCBL_n$ gösterilmiştir ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

Hankel dönüşüm matrisinin tanımına göre;

- $HCBL_1 = \det[CBL_1] = \det[4] = 4 = BL_1,$
- $HCBL_2 = \det \begin{bmatrix} CBL_1 & CBL_2 \\ CBL_2 & CBL_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 120 \end{bmatrix} = -4 = -BL_1,$
- $HCBL_3 = \det \begin{bmatrix} CBL_1 & CBL_2 & CBL_3 \\ CBL_2 & CBL_3 & CBL_4 \\ CBL_3 & CBL_4 & CBL_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 22 & 120 \\ 22 & 120 & 660 \\ 120 & 660 & 3644 \end{bmatrix} = -176$
 $= 10BL_2 - BL_1,$

eşitlikleri elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b).

4.1.4. Hiperbolik Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas kuaterniyonları

Bu bölümde Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin hiperbolik kuaterniyonlar üzerine bir uygulaması yapılmıştır. Daha sonra bu uygulamanın Binet formülleri, toplam formülleri, özel üreteç fonksiyonları gibi birçok özellikleri bulunmuştur. Son olarak da Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizileri ile hiperbolik kuaterniyon değerleri ilişkilendirilmiştir.

Tanım 4.1.4.1. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonları $\check{H}BF_n$ ve hiperbolik Bakır Lucas kuaterniyonları $\check{H}BL_n$ sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\check{H}BF_n = BF_n i_1 + BF_{n+1} i_2 + BF_{n+2} i_3 + BF_{n+3} i_4 = (BF_n, BF_{n+1}, BF_{n+2}, BF_{n+3})$$

ve

$$\check{H}BL_n = BL_n i_1 + BL_{n+1} i_2 + BL_{n+2} i_3 + BL_{n+3} i_4 = (BL_n, BL_{n+1}, BL_{n+2}, BL_{n+3}).$$

Burada BF_n ; n^{th} Bakır Fibonacci dizisinin terimi, BL_n ; n^{th} Bakır Lucas dizisinin terimi ve i_1, i_2, i_3, i_4 ise Tablo 1'deki hiperbolik kuaterniyon değerleri şeklinde ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b).

Sırada hiperbolik Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas kuaterniyonlarının ilk dört terimi aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonları için

- $\check{H}BF_0 = i_2 + 4i_3 + 17i_4,$

- $\check{H}BF_1 = i_1 + 4i_2 + 17i_3 + 72i_4,$
- $\check{H}BF_2 = 4i_1 + 17i_2 + 72i_3 + 305i_4,$
- $\check{H}BF_3 = 17i_1 + 72i_2 + 305i_3 + 1292i_4,$

Hiperbolik Bakır Lucas kuaterniyonları için

- $\check{H}BL_0 = 2i_1 + 4i_2 + 18i_3 + 76i_4,$
- $\check{H}BL_1 = 4i_1 + 18i_2 + 76i_3 + 322i_4,$
- $\check{H}BL_2 = 18i_1 + 76i_2 + 322i_3 + 1364i_4,$
- $\check{H}BL_3 = 76i_1 + 322i_2 + 1364i_3 + 5778i_4,$

şeklinde bulunmuştur (Özkan ve Akkuş, 2024b).

Tanım 4.1.4.2. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonlarının eşleniği $\check{H}BF_n^*$ ve hiperbolik Bakır Lucas kuaterniyonlarının eşleniği $\check{H}BL_n^*$ sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\check{H}BF_n^* = BF_n i_1 - BF_{n+1} i_2 - BF_{n+2} i_3 - BF_{n+3} i_4 = (BF_n, -BF_{n+1}, -BF_{n+2}, -BF_{n+3})$$

ve

$$\check{H}BL_n^* = BL_n i_1 - BL_{n+1} i_2 - BL_{n+2} i_3 - BL_{n+3} i_4 = (BL_n, -BL_{n+1}, -BL_{n+2}, -BL_{n+3}).$$

Tanım 4.1.4.3. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonlarının normu $\|\check{H}BF_n\|$ ve hiperbolik Bakır Lucas kuaterniyonlarının normu $\|\check{H}BL_n\|$ sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

$$\|\check{H}BF_n\| = \sqrt{BF_n^2 + BF_{n+1}^2 + BF_{n+2}^2 + BF_{n+3}^2}$$

ve

$$\|\check{H}BL_n\| = \sqrt{BL_n^2 + BL_{n+1}^2 + BL_{n+2}^2 + BL_{n+3}^2}.$$

Aşağıdaki teoremlerde hiperbolik Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas kuaterniyonları, bu hiperbolik kuaterniyonların normu ve eşleniği arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 4.1.4.1. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024b):

i. $\check{H}BF_{n+2} = 4\check{H}BF_{n+1} + \check{H}BF_n,$

ii. $\check{H}BL_{n+2} = 4\check{H}BL_{n+1} + \check{H}BL_n,$

iii. $\check{H}BF_{n+2}^* = 4\check{H}BF_{n+1}^* + \check{H}BF_n^*,$

iv. $\check{H}BL_{n+2}^* = 4\check{H}BL_{n+1}^* + \check{H}BL_n^*.$

İspat. Hiperbolik kuaterniyonların tanımı ve dizilerin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler bulunmuştur:

$$\begin{aligned} \text{i. } 4\check{H}BF_{n+1} + \check{H}BF_n &= 4(BF_{n+1}i_1 + BF_{n+2}i_2 + BF_{n+3}i_3 + BF_{n+4}i_4) \\ &\quad + (BF_n i_1 + BF_{n+1}i_2 + BF_{n+2}i_3 + BF_{n+3}i_4) \\ &= (4BF_{n+1} + BF_n)i_1 + (4BF_{n+2} + BF_{n+1})i_2 + (4BF_{n+3} + BF_{n+2})i_3 \\ &\quad + (4BF_{n+4} + BF_{n+3})i_4. \end{aligned}$$

Böylece, $BF_{n+2} = 4BF_{n+1} + BF_n$ olduğuna göre

$$\check{H}BF_{n+2} = 4\check{H}BF_{n+1} + \check{H}BF_n.$$

eşitliği doğrulanmıştır.

$$\begin{aligned} \text{iv. } 4\check{H}BL_{n+1}^* + \check{H}BL_n^* &= 4(BL_{n+1}i_1 - BL_{n+2}i_2 - BL_{n+3}i_3 - BL_{n+4}i_4) \\ &\quad + (BL_n i_1 - BL_{n+1}i_2 - BL_{n+2}i_3 - BL_{n+3}i_4) \\ &= (4BL_{n+1} + BL_n)i_1 - (4BL_{n+2} + BL_{n+1})i_2 - (4BL_{n+3} + BL_{n+2})i_3 \\ &\quad - (4BL_{n+4} + BL_{n+3})i_4. \end{aligned}$$

Böylece, $BL_{n+2} = 4BL_{n+1} + BL_n$ olduğuna göre

$$\check{H}BL_{n+2}^* = 4\check{H}BL_{n+1}^* + \check{H}BL_n^*.$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.1.4.2. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024b):

- i. $\check{H}BF_n + \check{H}BF_n^* = 2BF_n i_1$,
- ii. $\check{H}BF_n^2 = 2BF_n \check{H}BF_n + (\|\check{H}BF_n\|^2 - 2BF_n^2)i_1$,
- iii. $\check{H}BL_n + \check{H}BL_n^* = 2BL_n i_1$,
- iv. $\check{H}BL_n^2 = 2BL_n \check{H}BL_n + (\|\check{H}BL_n\|^2 - 2BL_n^2)i_1$.

İspat. Hiperbolik kuaterniyonların ve dizilerin tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \check{H}BF_n^2 &= (BF_n i_1 + BF_{n+1} i_2 + BF_{n+2} i_3 + BF_{n+3} i_4)(BF_n i_1 + BF_{n+1} i_2 + BF_{n+2} i_3 \\
 &\quad + BF_{n+3} i_4) \\
 &= (BF_n^2 + BF_{n+1}^2 + BF_{n+2}^2 + BF_{n+3}^2)i_1 + (2BF_n BF_{n+1})i_2 + (2BF_n BF_{n+2})i_3 \\
 &\quad + (2BF_n BF_{n+3})i_4 \\
 &= 2BF_n (BF_n i_1 + BF_{n+1} i_2 + BF_{n+2} i_3 + BF_{n+3} i_4) + (-BF_n^2 + BF_{n+1}^2 + BF_{n+2}^2 + BF_{n+3}^2)i_1.
 \end{aligned}$$

Son eşitlikten ve hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonların normunun tanımı dikkate alınırsa

$$\check{H}BF_n^2 = 2BF_n \check{H}BF_n + (\|\check{H}BF_n\|^2 - 2BF_n^2)i_1.$$

eşitliği doğrulanmıştır.

$$\begin{aligned}
 \text{iii. } \check{H}BL_n + \check{H}BL_n^* &= (BL_n i_1 + BL_{n+1} i_2 + BL_{n+2} i_3 + BL_{n+3} i_4) \\
 &\quad + (BL_n i_1 - BL_{n+1} i_2 - BL_{n+2} i_3 - BL_{n+3} i_4) \\
 &= 2BL_n i_1
 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmıştır ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.1.4.3. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024b):

- i. $i_1 \check{H}BF_n - i_2 \check{H}BF_{n+1} - i_3 \check{H}BF_{n+2} - i_4 \check{H}BF_{n+3} = (BF_{n+2} + 16BF_{n+1})i_1$,
- ii. $i_1 \check{H}BL_n - i_2 \check{H}BL_{n+1} - i_3 \check{H}BL_{n+2} - i_4 \check{H}BL_{n+3} = (BL_{n+2} + 16BL_{n+1})i_1$.

İspat. i. Hiperbolik kuaterniyonların özellikleri ve dizinin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
i_1 \check{H}BF_n - i_2 \check{H}BF_{n+1} - i_3 \check{H}BF_{n+2} - i_4 \check{H}BF_{n+3} &= (BF_n - BF_{n+2} - BF_{n+4} + BF_{n+6})i_1 \\
&+ (BF_{n+1} - BF_{n+1} - BF_{n+5} + BF_{n+5})i_2 + (BF_{n+2} + BF_{n+4} - BF_{n+2} - BF_{n+4})i_3 \\
&+ (BF_{n+3} - BF_{n+3} + BF_{n+3} - BF_{n+3})i_4 \\
&= (BF_n - BF_{n+2} - BF_{n+4} + BF_{n+6})i_1 \\
&= (BF_{n+2} + 16BF_{n+1})i_1.
\end{aligned}$$

eşitliği doğrulanmıştır ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilmiştir.

Aşağıdaki teoremden hiperbolik Bakır Fibonacci, Bakır Lucas kuaterniyonları ve onların eşleniklerinin Binet formülleri ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.4.4. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre

$$\text{i. } \check{H}BF_n = \frac{\bar{\kappa}\kappa^n - \bar{\theta}\theta^n}{\kappa - \theta},$$

$$\text{ii. } \check{H}BL_n = \bar{\kappa}\kappa^n + \bar{\theta}\theta^n,$$

$$\text{iii. } \check{H}BF_n^* = \frac{\bar{\kappa}^*\kappa^n - \bar{\theta}^*\theta^n}{\kappa - \theta},$$

$$\text{iv. } \check{H}BL_n^* = \bar{\kappa}^*\kappa^n + \bar{\theta}^*\theta^n,$$

burada

$$\bar{\kappa} = i_1 + \kappa i_2 + \kappa^2 i_3 + \kappa^3 i_4 = (1, \kappa, \kappa^2, \kappa^3),$$

$$\bar{\kappa}^* = (i_1 - \kappa i_2 - \kappa^2 i_3 - \kappa^3 i_4) = (1, -\kappa, -\kappa^2, -\kappa^3),$$

$$\bar{\theta} = i_1 + \theta i_2 + \theta^2 i_3 + \theta^3 i_4 = (1, \theta, \theta^2, \theta^3)$$

$$\bar{\theta}^* = (i_1 - \theta i_2 - \theta^2 i_3 - \theta^3 i_4) = (1, -\theta, -\theta^2, -\theta^3)$$

şeklinde ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024b).

İspat. i. Hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülünün elde edilmesinde, ikinci dereceden doğrusal tekrarlama bağıntıları için tanımlanan genel Binet formu kullanılmıştır:

$$\check{H}BF_n = S\kappa^n + T\theta^n.$$

Farklı n değerlerine göre aşağıdaki denklem sistemi bulunmuştur:

$$\check{H}BF_0 = i_2 + 4i_3 + 17i_4 = S + T$$

$$\check{H}BF_1 = i_1 + 4i_2 + 17i_3 + 72i_4 = S\kappa + T\theta.$$

Buradan

$$S = \frac{\check{H}BF_1 - \theta\check{H}BF_0}{\kappa - \theta} = \frac{i_1 + \kappa i_2 + \kappa^2 i_3 + \kappa^3 i_4}{\kappa - \theta} = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa - \theta}$$

$$T = \frac{\check{H}BF_1 - \kappa\check{H}BF_0}{-\kappa + \theta} = \frac{i_1 + \theta i_2 + \theta^2 i_3 + \theta^3 i_4}{-(\kappa - \theta)} = \frac{-\bar{\theta}}{\kappa - \theta}$$

elde edilmiştir. Böylece Hiperbolik Bakır Fibonacci kuaterniyonlarının Binet formülü

$$\check{H}BF_n = \frac{\bar{\kappa}\kappa^n - \bar{\theta}\theta^n}{\kappa - \theta}$$

şeklinde bulunmuştur ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde, Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin terimleri ile hiperbolik kuaterniyon değerleriyle ilişkilendirilmiştir.

Teorem 4.1.4.5. $a, b \in \mathbb{N}$ ve $a < b$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024b):

- i. $\check{H}BF_{a+2b} = \frac{BF_{2b}}{4} \check{H}BL_{a+1} - \frac{BL_{2b-1}}{4} \check{H}BF_a,$
- ii. $\check{H}BL_{a+2b} = \sqrt{5} \frac{BF_{2b}}{2} \check{H}BF_{a+1} - \frac{BL_{2b-1}}{4} \check{H}BL_a,$
- iii. $\check{H}BF_{a+2b} = \frac{BF_{2b}}{4} \check{H}BF_{a+2} - \frac{BL_{2b-2}}{4} \check{H}BF_a,$
- iv. $\check{H}BL_{a+2b} = \frac{BF_{2b}}{4} \check{H}BL_{a+2} - \frac{BF_{2b-2}}{4} \check{H}BL_a.$

İspat. Hiperbolik Bakır Fibonacci, Bakır Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{i. } \frac{BF_{2b}}{4} \check{H}BL_{a+1} - \frac{BL_{2b-1}}{4} \check{H}BF_a &= \frac{1}{4} \frac{\kappa^{2b} - \theta^{2b}}{\kappa - \theta} (\bar{\kappa}\kappa^{a+1} + \bar{\theta}\theta^{a+1}) - \frac{1}{4} \frac{\kappa^{2b-1} - \theta^{2b-1}}{\kappa - \theta} \frac{\bar{\kappa}\kappa^a - \bar{\theta}\theta^a}{\kappa - \theta} \\ &= \frac{\bar{\kappa}\kappa^{a+2b} \left(\kappa - \frac{1}{\kappa}\right) - \bar{\theta}\theta^{2a+b} \left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)}{4(\kappa - \theta)}. \end{aligned}$$

$\kappa = -\frac{1}{\theta}$, $\theta = -\frac{1}{\kappa}$ ve $\kappa + \theta = 4$ olduğuna göre

$$\check{H}BF_{a+2b} = \frac{BF_{2b}}{4} \check{H}BL_{a+1} - \frac{BL_{2b-1}}{4} \check{H}BF_a$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{iv. } \frac{BF_{2b}}{4} \check{H}BL_{a+2} - \frac{BF_{2b-2}}{4} \check{H}BL_a &= \frac{1}{4} \frac{\kappa^{2b} - \theta^{2b}}{\kappa - \theta} (\bar{\kappa}\kappa^{a+2} + \bar{\theta}\theta^{a+2}) - \frac{1}{4} \frac{\kappa^{2b-2} - \theta^{2b-2}}{\kappa - \theta} (\bar{\kappa}\kappa^a + \bar{\theta}\theta^a) \\ &= \frac{\bar{\kappa}\kappa^{a+2b}(\kappa^2 - \frac{1}{\kappa^2}) - \bar{\theta}\theta^{2a+b}(\theta^2 - \frac{1}{\theta^2})}{4(\kappa - \theta)}. \end{aligned}$$

$\theta^2 = \frac{1}{\kappa^2}$, $\kappa^2 = \frac{1}{\theta^2}$ ve $\kappa + \theta = 4$ olduğuna göre

$$\check{H}BL_{a+2b} = \frac{BF_{2b}}{4} \check{H}BL_{a+2} - \frac{BF_{2b-2}}{4} \check{H}BL_a.$$

şeklinde ifade edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.1.4.6. $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ve $c < a, b$. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024b):

- i. $\check{H}BF_{a+b} = BF_a \check{H}BF_{b+1} + BF_{a-1} \check{H}BF_b$,
- ii. $\check{H}BF_{2a+b} = BL_a \check{H}BF_{a+b} - (-1)^a \check{H}BF_b$,
- iii. $\check{H}BF_{ac+d} = \frac{BF_{ac}}{BF_a} \check{H}BF_{a+d} - (-1)^a \frac{BF_{ac-a}}{BF_a} \check{H}BF_d$,
- iv. $(-1)^{ac} BF_{ab-ac} \check{H}BF_d = \check{H}BF_{ac+d} BF_{ab} - \check{H}BF_{ab+d} BF_{ac}$,
- v. $\check{H}BF_{a+b} \check{H}BL_{a+c} - \check{H}BF_{a+c} \check{H}BL_{a+b} = BF_{b-c} (-1)^{a+c} (0, 8, 26, 86)$.

İspat. i. Hiperbolik Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} BF_a \check{H}BF_{b+1} + BF_{a-1} \check{H}BF_b &= \left(\frac{\kappa^a - \theta^a}{\kappa - \theta} \right) \left(\frac{\bar{\kappa}\kappa^{b+1} - \bar{\theta}\theta^{b+1}}{\kappa - \theta} \right) + \left(\frac{\kappa^{a-1} - \theta^{a-1}}{\kappa - \theta} \right) \left(\frac{\bar{\kappa}\kappa^b - \bar{\theta}\theta^b}{\kappa - \theta} \right) \\ &= \frac{1}{(\kappa - \theta)(\kappa - \theta)} [\bar{\kappa}\kappa^{a+b} \left(\kappa + \frac{1}{\kappa} \right) + \bar{\theta}\theta^{a+b} \left(\theta + \frac{1}{\theta} \right)]. \end{aligned}$$

$\frac{1}{\kappa} = -\theta$ ve $\frac{1}{\theta} = -\kappa$ olduğuna göre

$$\check{H}BF_{a+b} = BF_a \check{H}BF_{b+1} + BF_{a-1} \check{H}BF_b.$$

şeklinde ifade edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

4.2. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas Yapıları ile Dönüşüm ve Kuaterniyon Uygulamaları

Bu bölümde klasik Oresme dizisinin parametrik bir uzantısı olarak k -Oresme dizisi kurgulanmış ve bu bağıntı vasıtasıyla k -Oresme-Lucas dizisi keşfedilmiştir. Bu yeni dizi ailesinin de karakteristik yapıları ve asimptotik davranışları incelenerek Binet formülleri ile toplam formülleri yapılandırılmıştır. Ayrıca, k -Oresme ailesinin de Catalan ve Hankel dönüşümleri hesaplanarak literatürdeki diğer tamsayı dizileriyle olan geçişkenlikleri analiz edilmiştir. Ek olarak bu diziler için Cassini, Catalan, d'Ocagne ve Vajda gibi kritik matematiksel özdeşlikler doğrulanmış ve elde edilen özgün bulgular literatüre kazandırılmıştır. Son olarak, bu dizilerin hiperbolik kuaterniyon formları tanımlanarak üreteç fonksiyonları ve aralarındaki karşılıklı bağıntılar cebirsel olarak ortaya konmuştur.

4.2.1. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri

Tanım 4.2.1.1. İlk iki terimi $O_{k,0} = 0$, $O_{k,1} = \frac{1}{k}$ olan ve

$$O_{k,n+2} = O_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} O_{k,n}, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (4.7)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye k -Oresme dizisi denir (Özkan ve Akkuş, 2024a).

k -Oresme dizisinin ilk birkaç terimi şu şekilde bulunmuştur:

- $O_{k,0} = 0$,
- $O_{k,1} = \frac{1}{k}$,
- $O_{k,2} = \frac{1}{k}$,
- $O_{k,3} = \frac{1}{k^3}(k^2 - 1)$,
- $O_{k,4} = \frac{1}{k^3}(k^2 - 2)$,
- $O_{k,5} = \frac{1}{k^5}(k^4 - 3k^2 + 1)$,

- $O_{k,6} = \frac{1}{k^5}(k^4 - 4k^2 + 3).$

Tanım 4.2.1.2. İlk iki terimi $OL_{k,0} = 2, OL_{k,1} = 1$ olan ve

$$OL_{k,n+2} = OL_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} OL_{k,n}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (4.8)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan diziye k -Oresme-Lucas dizisi denir (Özkan ve Akkuş, 2024a).

Ayrıca k -Oresme-Lucas dizisinin ilk birkaç terimi şu şekilde bulunmuştur:

- $OL_{k,0} = 2,$
- $OL_{k,1} = 1,$
- $OL_{k,2} = \frac{1}{k^2}(k^2 - 2),$
- $OL_{k,3} = \frac{1}{k^2}(k^2 - 3),$
- $OL_{k,4} = \frac{1}{k^4}(k^4 - 4k^2 + 2),$
- $OL_{k,5} = \frac{1}{k^4}(k^4 - 5k^2 + 5),$
- $OL_{k,6} = \frac{1}{k^6}(k^6 - 6k^4 + 9k^2 - 2).$

Bu bilgilere göre k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin karakteristik denklemi,

$$r^2 - r + \frac{1}{k^2} = 0 \quad (4.9)$$

şeklinde olup bu denklemin kökleri;

$$\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2k} \text{ ve } \beta = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2k}$$

olarak elde edilmiştir. Ek olarak bu köklerle ilgili aşağıdaki eşitlikler doğrulanmıştır:

$$\alpha + \beta = 1, \alpha - \beta = \delta = \frac{\sqrt{k^2 - 4}}{k}, \alpha^2 + \beta^2 = 1 - \frac{2}{k^2} \text{ ve } \alpha\beta = \frac{1}{k^2}.$$

şeklinde bulunmuştur. Ayrıca k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin terimlerini aşağıdaki eşitlikler (Kapalı Form) yardımıyla da ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a):

- $O_{k,n} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-j}{j} (-1)^j k^{-2j-1},$
- $OL_{k,n} = k \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j} (-1)^j k^{-2j-1} - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{n-2-j}{j} (-1)^j k^{-2j-1}.$

Aşağıdaki teoremlerde k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri ele alınarak bu dizilerin temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Dizilerin yapısal özellikleri incelenmiş ve aralarındaki matematiksel ilişkiler ortaya konulmuştur. Bunun yanında bu iki dizinin birbirleriyle nasıl bağlantılı olduğu çeşitli bağıntılar ve özdeşlikler yardımıyla gösterilmiştir. Böylece bu dizilerinin teorik yapısı ve aralarındaki ilişki daha açık bir şekilde açıklanmıştır.

Teorem 4.2.1.1. (Binet formülleri) $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri aşağıdaki gibi ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$\text{i. } O_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)^k},$$

$$\text{ii. } OL_{k,n} = \alpha^n + \beta^n.$$

İspat. i. k -oresme dizisinin Binet formülünün elde edilmesinde, ikinci dereceden doğrusal tekrarlılama bağıntıları için tanımlanan genel Binet formu kullanılmıştır:

$$O_{k,n} = S\alpha^n + T\beta^n. \quad (4.10)$$

Buradaki S ve T reel sayıları dizinin başlangıç değerlerine bağlı olarak elde edilen denklem sisteminin çözülmesiyle elde edilmiştir. $n = 0$ ve $n = 1$ için elde edilen denklem sistemi çözüldüğünde $S = \frac{1}{\sqrt{k^2-4}}$ ve $T = -\frac{1}{\sqrt{k^2-4}}$ elde edilmiştir. Böylece bu bilgilere göre k -Oresme dizisinin Binet formülü aşağıdaki gibi gösterilmiştir:

$$O_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)^k}.$$

Benzer şekilde k -Oresme-Lucas dizisinin Binet formülü de aynı şekilde elde edilir.

Aşağıdaki teoremlerde, k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin karakteristik denkleminin kökleri ile bu diziler arasındaki ilişkileri incelenmiştir.

Teorem 4.2.1.2. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $|\beta| < \alpha$ olsun. Buna göre k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin ardışık iki teriminin büyük olanının küçük olanına oranı bu dizilerin karakteristik denkleminin büyük köküne yakınsamıştır (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O_{k,n+1}}{O_{k,n}} = \alpha \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OL_{k,n+1}}{OL_{k,n}} = \alpha.$$

İspat. k -Oresme dizisinin Binet formülü ve limit özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O_{k,n+1}}{O_{k,n}} = \frac{\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)k}}{\frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}{\alpha^n \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}.$$

Son eşitlikten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O_{k,n+1}}{O_{k,n}} = \alpha$$

bulunmuştur. Benzer şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OL_{k,n+1}}{OL_{k,n}} = \alpha$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.1.3. $k \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024a):

- i. $\alpha^{2n} = \alpha\sqrt{k^2 - 4}O_{k,2n} + \frac{1}{k^2}OL_{k,2n-1},$
- ii. $\beta^{2n} = -\beta\sqrt{k^2 - 4}O_{k,2n} + \frac{1}{k^2}OL_{k,2n-1},$
- iii. $\alpha^{2n+1} = \frac{1}{k^2}\sqrt{k^2 - 4}O_{k,2n} + \alpha OL_{k,2n+1},$
- iv. $\beta^{2n+1} = -\frac{1}{k^2}\sqrt{k^2 - 4}O_{k,2n} + \beta OL_{k,2n+1}.$

İspat. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{i. } r_1\sqrt{k^2 - 4}O_{k,2n} + \frac{1}{k^2}OL_{k,2n-1} &= \alpha\sqrt{k^2 - 4}\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)k} + \frac{1}{k^2}(\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}) \\ &= \alpha^{2n+1} - \alpha\beta^{2n} + \frac{1}{k^2}\alpha^{2n-1} + \frac{1}{k^2}\beta^{2n-1} \\ &= \alpha^{2n}\left(\alpha + \frac{1}{k^2\alpha}\right) + \beta^{2n}\left(-\alpha + \frac{1}{k^2\beta}\right) \\ &= \alpha^{2n}. \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir.

$$\text{iv. } -\frac{1}{k^2}\sqrt{k^2 - 4}O_{k,2n} + \beta OL_{k,2n+1} = -\frac{1}{k^2}\sqrt{k^2 - 4}\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)k} + \beta(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^{2n} \left(\alpha\beta - \frac{1}{k^2} \right) + \beta^{2n+1} \left(\beta + \frac{1}{k^2\beta} \right) \\
&= \beta^{2n+1}.
\end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri arasındaki özel bağıntılar verilmiştir.

Teorem 4.2.1.4. $k \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024a):

- i. $OL_{k,n} = kO_{k,n+1} - \frac{1}{k}O_{k,n-1}$,
- ii. $OL_{k,n}^2 - (k^2 - 4)O_{k,n}^2 = \frac{4}{k^{2n}}$,
- iii. $\frac{k^2-4}{k}O_{k,n} = OL_{k,n+1} - \frac{1}{k^2}OL_{k,n-1}$,
- iv. $O_{k,n}OL_{k,n} = O_{k,2n}$,
- v. $OL_{k,n} = 2kO_{k,n+1} - kO_{k,n}$,
- vi. $O_{k,n} = \frac{2k}{k^2-4}OL_{k,n+1} - \frac{k}{k^2-4}OL_{k,n}$,
- vii. $\sqrt{k^2-4}O_{k,n} + OL_{k,n} = 2\alpha^n$,
- viii. $\sqrt{k^2-4}O_{k,n} - OL_{k,n} = -2\beta^n$.

İspat. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\text{i. } kO_{k,n+1} - \frac{1}{k}O_{k,n-1} &= k \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)k} - \frac{1}{k} \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{(\alpha - \beta)k} \\
&= \frac{\alpha^n \left(\alpha - \frac{1}{k^2\alpha} \right) + \beta^n \left(-\beta + \frac{1}{k^2\beta} \right)}{\alpha - \beta} \\
&= OL_{k,n}.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{iii. } OL_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} OL_{k,n-1} &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \frac{1}{k^2} (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \\
&= \alpha^n \left(\alpha - \frac{1}{k^2 \alpha} \right) + \beta^n \left(\beta - \frac{1}{k^2 \beta} \right) \\
&= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha - \beta) \\
&= (\alpha - \beta)^2 k \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)k} \\
&= \frac{k^2 - 4}{k} O_{k,n}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.1.5. $k \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$\begin{aligned}
\text{i. } 2OL_{k,m+n} &= OL_{k,m} OL_{k,n} + (k^2 - 4)O_{k,m} O_{k,n}, \\
\text{ii. } (k^2 - 4)O_{k,n} O_{k,m+2n} &= OL_{k,m+3n} - \frac{1}{k^{2n}} OL_{k,m+n}, \\
\text{iii. } \frac{2}{k^{2n}} OL_{k,m-n} &= OL_{k,m} OL_{k,n} - (k^2 - 4)O_{k,m} O_{k,n}, \\
\text{iv. } \frac{2}{k^{2n-1}} O_{k,m-n} &= kO_{k,m} OL_{k,n} - kO_{k,n} OL_{k,m}, \\
\text{v. } 2OL_{k,n+1} &= \frac{k^2 - 4}{k} O_{k,n} + OL_{k,n}.
\end{aligned}$$

İspat. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\text{i. } OL_{k,m} OL_{k,n} + (k^2 - 4)O_{k,m} O_{k,n} &= (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) + (k^2 - 4) \frac{\alpha^m - \beta^m}{(\alpha - \beta)k} \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)k} \\
&= \alpha^{m+n} + \alpha^m \beta^n + \alpha^n \beta^m + \beta^{m+n} + \alpha^{m+n} - \alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m + \beta^{m+n} \\
&= \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} \\
&= 2OL_{k,m+n}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\text{iv. } kO_{k,m} OL_{k,n} - kO_{k,n} OL_{k,m} = k \frac{\alpha^m - \beta^m}{(\alpha - \beta)k} (\alpha^n + \beta^n) - k \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)k} (\alpha^m + \beta^m)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{m+n} + \alpha^m \beta^n - \alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{m+n} + \alpha^n \beta^m - \alpha^m \beta^n - \beta^{m+n}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{2}{k^{2n-1}} O_{k,m-n}.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.1.6. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024a):

- i. $OL_{k,m} OL_{k,n} = OL_{k,m+n} + \frac{1}{k^{2n}} OL_{k,m-n}$,
- ii. $kO_{k,m} OL_{k,n} = kO_{k,m+n} + \frac{1}{k^{2n-1}} O_{k,m-n}$,
- iii. $kO_{k,m+n+1} = k^2 O_{k,m+1} O_{k,n+1} - O_{k,m} O_{k,n}$,
- iv. $OL_{k,m+n+1} = kO_{k,m+1} OL_{k,n+1} - \frac{1}{k} O_{k,m} OL_{k,n}$,
- v. $kOL_{k,2n} O_{k,m+2n} = kO_{k,m+4n} + \frac{1}{k^{4n-1}} O_{k,m}$,
- vi. $OL_{k,2n} OL_{k,m+2n} = OL_{k,m+4n} + \frac{1}{k^{4n}} OL_{k,m}$,
- vii. $kO_{k,n} OL_{k,m+2n} = kO_{k,m+3n} - \frac{1}{k^{2n-1}} O_{k,m+n}$,
- viii. $kOL_{k,n} O_{k,m+2n} = kO_{k,m+3n} + \frac{1}{k^{2n-1}} O_{k,m+n}$,
- ix. $2kO_{k,m+n} = kO_{k,m} OL_{k,n} + kO_{k,n} OL_{k,m}$,
- x. $OL_{k,n} OL_{k,m+2n} = OL_{k,m+3n} + \frac{1}{k^{4n}} OL_{k,m+n}$.

İspat. i. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\text{i. } OL_{k,m} OL_{k,n} &= (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) \\
&= \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \alpha^m \beta^n + \beta^m \alpha^n \\
&= \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \alpha^n \beta^n (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n}) \\
&= OL_{k,m+n} + \frac{1}{k^{2n}} OL_{k,m-n}.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{iii. } k^2 O_{k,m+1} O_{k,n+1} - O_{k,m} O_{k,n} &= k^2 \frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{(\alpha-\beta)k} \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)k} - \frac{\alpha^m-\beta^m}{(\alpha-\beta)k} \frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)k} \\
&= \frac{\alpha^{m+n+1}(\alpha-\frac{1}{\alpha k^2}) + \beta^{m+n+1}(\beta-\frac{1}{\beta k^2})}{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)} \\
&= k \frac{\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1}}{(\alpha-\beta)k} \\
&= k O_{k,m+n+1}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{vii. } k O_{k,n} O L_{k,m+2n} &= k \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)k} \right) (\alpha^{m+2n} + \beta^{m+2n}) \\
&= \frac{\alpha^{m+3n} - \beta^{m+3n} - \alpha^n \beta^n (\alpha^{m+n} - \beta^{m+n})}{\alpha - \beta} \\
&= k \frac{\alpha^{m+3n} - \beta^{m+3n}}{(\alpha - \beta)k} - \frac{k}{k^{2n}} \frac{\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}}{(\alpha - \beta)k} \\
&= k O_{k,m+3n} - \frac{1}{k^{2n-1}} O_{k,m+n}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.1.7. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$\begin{aligned}
\text{i. } k^2 O_{k,n}^2 + k^2 O_{k,n+1}^2 &= \frac{1}{k^{2n+2}-4k^{2n}} (k^{2n+2} O L_{k,2n} - 2k^2) \\
&\quad + \frac{1}{k^{2n+2}-4k^{2n}} (k^{2n+4} O L_{k,2n+2} - 2k^2), \\
\text{ii. } O L_{k,n}^2 + O L_{k,n+1}^2 &= O L_{k,2n} + O L_{k,2n+2} + \frac{2}{k^{2n}} + \frac{2}{k^{2n+1}}, \\
\text{iii. } k^2 O_{k,n+1}^2 - k^2 O_{k,n-1}^2 &= \frac{1}{k^{2n+2}-4k^{2n}} (k^{2n+2} O L_{k,2n+2} - 2) \\
&\quad - \frac{1}{k^{2n+2}-4k^{2n}} (k^{2n-2} O L_{k,2n-2} - 2), \\
\text{iv. } O L_{k,n+1}^2 - O L_{k,n-1}^2 &= O L_{k,2n+2} - O L_{k,2n-2} + \frac{2}{k^{2n+2}} - \frac{2}{k^{2n-2}}, \\
\text{v. } O_{k,n} O_{k,n+1} &= \frac{1}{k^{2n+2}-4k^{2n}} (k^{2n} O L_{k,2n+1} - 1),
\end{aligned}$$

$$\text{vi. } OL_{k,n}OL_{k,n+1} = OL_{k,2n+1} + \frac{1}{k^{2n}},$$

$$\text{vii. } O_{k,-n} = -\frac{1}{k^{2n}}O_{k,n},$$

$$\text{viii. } OL_{k,-n} = \frac{1}{k^{2n}}OL_{k,n}.$$

İspat. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{ii. } OL_{k,n}^2 + OL_{k,n+1}^2 &= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} \\ &= OL_{k,2n} + OL_{k,2n+2} + \frac{2}{k^{2n}} + \frac{2}{k^{2n+1}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{vi. } OL_{k,n}OL_{k,n+1} &= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} + \alpha^n\beta^{n+1} + \beta^n\alpha^{n+1} \\ &= OL_{k,2n+1} + \frac{1}{k^{2n}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{vii. } O_{k,-n} &= \frac{\alpha^{-n}-\beta^{-n}}{(\alpha-\beta)k} = -\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n\beta^n(\alpha-\beta)k} \\ &= -\frac{1}{k^{2n}}O_{k,n} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin özel toplam formülleri üzerine çalışma yapılmıştır.

Teorem 4.2.1.8. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$\text{i. } \sum_{s=0}^n O_{k,s} = O_{k,n-1} + (1 - k^2)O_{k,n},$$

$$\text{ii. } \sum_{s=0}^n OL_{k,s} = 2k^2 + OL_{k,n-1} + (1 - k^2)OL_{k,n}.$$

İspat. i. k -Oresme dizisinin tekrarlama bağıntısı ve toplam sembolünün özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$O_{k,2} = O_{k,1} - \frac{1}{k^2} O_{k,0},$$

$$O_{k,3} = O_{k,2} - \frac{1}{k^2} O_{k,1},$$

$\vdots$

$$O_{k,n} = O_{k,n-1} - \frac{1}{k^2} O_{k,n-2}.$$

Eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$-\frac{1}{k} + \sum_{s=0}^n O_{k,s} = \sum_{s=1}^{n-1} O_{k,s} - \frac{1}{k^2} \sum_{s=0}^{n-2} O_{k,s},$$

$$-\frac{1}{k} + \sum_{s=0}^n O_{k,s} = (-O_{k,n} - O_{k,1} + \sum_{s=0}^n O_{k,s}) - \frac{1}{k^2} (-O_{k,n} - O_{k,n-1} + \sum_{s=0}^n O_{k,s}),$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{s=0}^n O_{k,s} = k + O_{k,n-1} + (1 - k^2) O_{k,n}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilmiştir.

Aşağıdaki teoremlerde k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin özel üreteç fonksiyonları üzerine çalışma yapılmıştır.

Teorem 4.2.1.9. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$O_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} O_{k,n} x^n = \frac{kx}{k^2 - k^2 x - x^2}$$

ve

$$OL_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} OL_{k,n} x^n = \frac{2k^2 - k^2 x}{k^2 - k^2 x - x^2}.$$

İspat. Üreteç fonksiyonunun tanımı ve k -Oresme dizisinin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$O_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} O_{k,n} x^n = \frac{1}{k} x + \sum_{n=2}^{\infty} O_{k,n} x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k}x + \sum_{n=2}^{\infty} O_{k,n-1}x^n - \frac{1}{k^2}\sum_{n=2}^{\infty} O_{k,n-2}x^n \\
&= \frac{1}{k}x + x\sum_{n=1}^{\infty} O_{k,n}x^n - \frac{1}{k^2}x^2\sum_{n=0}^{\infty} O_{k,n}x^n \\
&= \frac{kx}{k^2-k^2x-x^2}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde k -Oresme-Lucas dizisi için

$$\begin{aligned}
OL_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} OL_{k,n}x^n = 2 + x + \sum_{n=2}^{\infty} OL_{k,n}x^n \\
&= 2 + x + \sum_{n=2}^{\infty} OL_{k,n-1}x^n - \frac{1}{k^2}\sum_{n=2}^{\infty} OL_{k,n-2}x^n \\
&= 2 + x + x(-2 + \sum_{n=0}^{\infty} OL_{k,n}x^n) - \frac{1}{k^2}x^2\sum_{n=0}^{\infty} OL_{k,n}x^n. \\
&= \frac{2k^2-k^2x}{k^2-k^2x-x^2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Aşağıda ifade edilen teoremlerde k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri için özel özdeşlikleri hesaplanmıştır.

Teorem 4.2.1.10. $k \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ ve $n, r, i, j \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024a):

i. Cassini Özdeşliği

- $O_{k,n+1}O_{k,n-1} - O_{k,n}^2 = -\frac{1}{k^{2n}},$
- $OL_{k,n+1}OL_{k,n-1} - OL_{k,n}^2 = \frac{1}{k^{2n}}(k^2 - 4).$

ii. Catalan Özdeşliği

- $O_{k,n+r}O_{k,n-r} - O_{k,n}^2 = -\frac{1}{k^{2n-2r}}O_{k,r}^2,$
- $OL_{k,n+r}OL_{k,n-r} - OL_{k,n}^2 = \frac{k^2-4}{k^{2n-2r}}O_{k,r}^2.$

iii. d'Ocagne Özdeşliği

- $O_{k,n+1}O_{k,r} - O_{k,n}O_{k,r+1} = -\frac{1}{k^{2n-1}}O_{k,n-r},$
- $OL_{k,n+1}OL_{k,r} - OL_{k,n}OL_{k,r+1} = \frac{k^2-4}{k^{2r+1}}O_{k,n-r}.$

iv. Vajda Özdeşliği

- $O_{k,n+i}O_{k,n+j} - O_{k,n}O_{k,n+i+j} = \frac{1}{k^{2n}}O_{k,i}O_{k,j},$
- $OL_{k,n+i}OL_{k,n+j} - OL_{k,n}OL_{k,n+i+j} = \frac{4-k^2}{k^{2n}}O_{k,i}O_{k,j}.$

v. Melham Özdeşliği

- $O_{k,n+1}O_{k,n+2}O_{k,n+6} - O_{k,n}^3 = \frac{1}{k^{2-4}}(O_{k,3n+9} - O_{k,3n} + \frac{3}{k^{2n}}O_{k,n} - \frac{1}{k^{2n+12}}O_{k,n-3}$
 $- \frac{1}{k^{2n+4}}O_{k,n+5} - \frac{1}{k^{2n+2}}O_{k,n+7}),$
- $OL_{k,n+1}OL_{k,n+2}OL_{k,n+6} - OL_{k,n}^3 = OL_{k,3n+9} - \frac{3}{k^{2n}}OL_{k,n} + \frac{1}{k^{2n+12}}OL_{k,n-3}$
 $+ \frac{1}{k^{2n+4}}OL_{k,n+5} + \frac{1}{k^{2n+2}}OL_{k,n+7} - OL_{k,3n}.$

vi. Gelin-Cesaro Özdeşliği

- $O_{k,n+2}O_{k,n+1}O_{k,n-1}O_{k,n-2} - O_{k,n}^4 = \frac{1}{(k^2-4)^2}(-\frac{1}{k^{2n-4}}OL_{k,2n+4} - \frac{1}{k^{2n-2}}OL_{k,2n+2}$
 $+ \frac{1}{k^{4n-6}}OL_{k,6}) + \frac{1}{(k^2-4)^2}(-\frac{1}{k^{2n+2}}OL_{k,2n-2} - \frac{1}{k^{4n-2}}OL_{k,2} - \frac{1}{k^{2n+4}}OL_{k,2n-4}$
 $+ \frac{4}{k^{2n}}OL_{k,2n} - \frac{5}{k^{4n}}),$
- $OL_{k,n+2}OL_{k,n+1}OL_{k,n-1}OL_{k,n-2} - OL_{k,n}^4 = \frac{1}{k^{2n-4}}OL_{k,2n+4} + \frac{1}{k^{2n-2}}OL_{k,2n+2}$
 $+ \frac{1}{k^{4n-6}}OL_{k,6} + \frac{1}{k^{2n+2}}OL_{k,2n-2} + \frac{1}{k^{4n-2}}OL_{k,2} + \frac{1}{k^{2n+4}}OL_{k,2n-4} - \frac{4}{k^{2n}}OL_{k,2n} - \frac{5}{k^{4n}}.$

İspat. i. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve bu dizilerin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
 O_{k,n+1}O_{k,n-1} - O_{k,n}^2 &= \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)k} \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{(\alpha-\beta)k} - \frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)k} \frac{\alpha^n-\beta^n}{(\alpha-\beta)k} \\
 &= \frac{\alpha^{2n}-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-\beta^{n+1}\alpha^{n-1}+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2k^2} - \frac{\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2k^2} \\
 &= \frac{(\alpha\beta)^{\frac{n-\alpha}{\beta}}}{(\alpha-\beta)^2k^2} + \frac{(\alpha\beta)^{\frac{n-\beta}{\alpha}}}{(\alpha-\beta)^2k^2} + \frac{2(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2k^2} \\
 &= -\frac{1}{k^{2n}}.
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde k -Oresme-Lucas dizisi için

$$\begin{aligned}
OL_{k,n+1}OL_{k,n-1} - OL_{k,n}^2 &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^n + \beta^n) \\
&= (\alpha^{2n} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \beta^{n+1}\alpha^{n-1} + \beta^{2n}) - (\alpha^{2n} + \alpha^n\beta^n + \beta^n\alpha^n + \beta^{2n}) \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2\right) \\
&= \frac{1}{k^{2n}}(k^2 - 4)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilmiştir.

Aşağıdaki teoremlerde k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin bazı k değerlerine göre farklı sayı dizileriyle ilişkilendirilmiştir.

Teorem 4.2.1.11. $k = 3$ değeri için k -Oresme dizisi ile Fibonacci dizisi arasında aşağıdaki ilişki bulunmuştur (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$O_{3,n} = \frac{1}{3^n} F_{2n}.$$

İspat. k -Oresme dizisinin açık formda Binet formülü aşağıdaki gibi oluşmuştur:

$$O_{k,n} = \frac{\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n}{\sqrt{k^2-4}}.$$

Bu bağıntıda $k = 3$ değeri için

$$\begin{aligned}
O_{3,n} &= \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{3^n\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{3^n} F_{2n}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.1.12. $k = 3$ değeri için k -Oresme-Lucas dizisi ile Lucas dizisi arasında aşağıdaki ilişki elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$OL_{3,n} = \frac{1}{3^n} L_{2n}.$$

İspat. k -Oresme-Lucas dizisinin açık formda Binet formülü aşağıdaki gibi oluşmuştur:

$$OL_{k,n} = \left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n + \left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n.$$

Bu bağıntıda $k = 3$ değeri için

$$\begin{aligned} OL_{3,n} &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)^n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^n} L_{2n} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.1.13. $k = 6$ değeri için k -Oresme dizisi ile Pell dizisi arasında aşağıdaki ilişki bulunmuştur (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$O_{6,n} = \frac{1}{2} \frac{1}{6^n} P_{2n}.$$

İspat. k -Oresme dizisinin açık formda Binet formülü aşağıdaki gibi oluşmuştur:

$$O_{k,n} = \frac{\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n}{\sqrt{k^2-4}}.$$

Bu formülde $k = 6$ değeri için

$$\begin{aligned} O_{6,n} &= \frac{\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{6}\right)^n - \left(\frac{6-4\sqrt{2}}{6}\right)^n}{4\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})^{2n} - (1-2\sqrt{2})^{2n}}{26^n 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{6^n} P_{2n} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.1.14. $k = 6$ değeri için k -Oresme-Lucas dizisi ile Pell-Lucas dizisi arasında aşağıdaki ilişki elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$OL_{6,n} = \frac{1}{6^n} Q_{2n}.$$

İspat. k -Oresme-Lucas dizisinin açık formda Binet formülü aşağıdaki gibi oluşmuştur:

$$OL_{k,n} = \left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n + \left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2k}\right)^n.$$

Bu formülde $k = 6$ değeri için

$$\begin{aligned} OL_{6,n} &= \left(\frac{6+4\sqrt{2}}{6}\right)^n + \left(\frac{6-4\sqrt{2}}{6}\right)^n = \frac{(1+2\sqrt{2})^{2n} + (1-2\sqrt{2})^{2n}}{6^n} \\ &= \frac{1}{6^n} Q_{2n} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

4.2.2. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Catalan dönüşümleri

Aşağıda k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Catalan dönüşümü tanımlanmıştır. Ardından bu dönüşümlerden elde edilen yeni dizilerin bazı temel özellikleri incelenmiş ve çeşitli bağıntıları ortaya konulmuştur.

Tanım 4.2.2.1. k -Oresme dizisinin Catalan dönüşümü $CO_{k,n}$ ile gösterilmiştir. Böylece

$$CO_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} O_{k,i}, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a).

Bu dönüşüm yardımıyla k -Oresme dizisinin Catalan dönüşümünün terimleri:

- $CO_{k,1} = \sum_1^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} O_{k,i} = \frac{1}{k},$
- $CO_{k,2} = \sum_1^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} O_{k,i} = \frac{1}{k},$
- $CO_{k,3} = \frac{1}{k^3} (5k^2 - 1),$
- $CO_{k,4} = \frac{1}{k^3} (14k^2 - 5),$
- $CO_{k,5} = \frac{1}{k^5} (42k^4 - 20k^2 + 1),$

şeklinde bulunmuştur. Bu dönüşümün terimlerini matrisler yardımıyla da elde edilmiştir. Yani,

$$\begin{bmatrix} CO_{k,1} \\ CO_{k,2} \\ CO_{k,3} \\ CO_{k,4} \\ CO_{k,5} \\ CO_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{k,1} \\ O_{k,2} \\ O_{k,3} \\ O_{k,4} \\ O_{k,5} \\ O_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Açık formatta yazarsak aşağıdaki eşitlik sağlanmıştır: (Özkan ve Akkuş, 2024a).

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{2}{k} \\ \frac{1}{k^3}(5k^2 - 1) \\ \frac{1}{k^3}(14k^2 - 5) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k^3}(k^2 - 1) \\ \frac{1}{k^3}(k^2 - 2) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Tanım 4.2.2.2. k -Oresme-Lucas dizisinin Catalan dönüşümü $COL_{k,n}$ ile gösterilmiştir. Böylece

$$COL_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} OL_{k,i}, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (4.12)$$

şeklinde ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a).

Bu dönüşüm yardımıyla k -Oresme-Lucas dizisinin Catalan dönüşümünün terimleri:

- $COL_{k,1} = \sum_1^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} OL_{k,i} = 1,$
- $COL_{k,2} = \sum_1^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} OL_{k,i} = \frac{1}{k^2}(2k^2 - 2),$
- $COL_{k,3} = \frac{1}{k^2}(5k^2 - 8),$
- $COL_{k,4} = \frac{1}{k^4}(14k^4 - 23k^2 + 2),$
- $COL_{k,5} = \frac{1}{k^4}(42k^4 - 76k^2 + 13),$

şeklinde bulunmuştur. Bu dönüşümün terimlerini matrisler yardımıyla elde edilmiştir. Yani,

$$\begin{bmatrix} COL_{k,1} \\ COL_{k,2} \\ COL_{k,3} \\ COL_{k,4} \\ COL_{k,5} \\ COL_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OL_{k,1} \\ OL_{k,2} \\ OL_{k,3} \\ OL_{k,4} \\ OL_{k,5} \\ OL_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Açık formatta yazarsak aşağıdaki eşitlik sağlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{k^2}(2 - 2k^2) \\ \frac{1}{k^2}(5 - 8k^2) \\ \frac{1}{k^4}(2 - 22k^2 + 14k^4) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \dots \\ 1 & 1 & & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{k^2}(k^2 - 2) \\ \frac{1}{k^2}(k^2 - 3) \\ \frac{1}{k^4}(k^4 - 3k^2 + 2) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Aşağıdaki teoremda k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Catalan dönüşümünün üreteç fonksiyonları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Teorem 4.2.2.1. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024a):

$$\text{i. } CO_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} CO_{k,n}x^n = \frac{2}{4-4x-3k+(3k-2)\sqrt{1-4x}},$$

$$\text{ii. } COL_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} COL_{k,n}x^n = \frac{2-12k+12k\sqrt{1-4x}}{4-4x-3k+(3k-2)\sqrt{1-4x}}.$$

İspat. i. $O_k(x) = \frac{kx}{k^2-k^2x-x^2}$ ve $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ sırasıyla k -Oresme ve Catalan dizilerinin üreteç fonksiyonlarıdır. Buna göre $O_k(x * C(x))$ bileşke dönüşümü ile k -Oresme dizisinin Catalan dönüşümünün üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Bu bilgilere göre

$$\begin{aligned} CO_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} CO_{k,n}x^n = O_k(x * C(x)) \\ &= \frac{k \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}{k^2 - k^2 \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{4-4x-3k+(3k-2)\sqrt{1-4x}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir. Benzer şekilde k -Oresme-Lucas dizisinin Catalan dönüşümünün üreteç fonksiyonu

$$COL_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} COL_{k,n}x^n = \frac{2-12k+12k\sqrt{1-4x}}{4-4x-3k+(3k-2)\sqrt{1-4x}}$$

eşitlikleri bulunmuştur ve ispat tamamlanmıştır.

4.2.3. Catalan k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Hankel Dönüşümleri

Aşağıda k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin Catalan dönüşümü sonucu elde edilen dizilerin terimleri kullanılarak Hankel matrisleri oluşturulmuştur. Daha sonra bu dönüşüm ile elde edilen sonuçlar dizilerin terimleri ile ilişkilendirilmiştir.

Catalan k -Oresme dizisinin terimlerine uygulanan Hankel dönüşümünü $HCO_{k,n}$ ile gösterelim.

Böylece Hankel dönüşüm matrisinin tanımına göre;

- $HCO_{k,1} = \det[CO_{k,1}] = \det \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{k} = O_{k,1},$

- $HCO_{k,2} = \det \begin{bmatrix} CO_{k,1} & CO_{k,2} \\ CO_{k,2} & CO_{k,3} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \frac{2}{k} \\ \frac{2}{k} & \frac{1}{k^3}(5k^2 - 1) \end{bmatrix} = \frac{1}{k^4}(k^2 - 1) = \frac{1}{k}O_{k,3},$
- $HCO_{k,3} = \det \begin{bmatrix} CO_{k,1} & CO_{k,2} & CO_{k,3} \\ CO_{k,2} & CO_{k,3} & CO_{k,4} \\ CO_{k,3} & CO_{k,4} & CO_{k,5} \end{bmatrix} = \frac{1}{k^7}(k^4 - 3k^2 + 1) = \frac{1}{k^2}O_{k,5},$

şeklinde elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a).

Sırada da k -Oresme-Lucas dizisinin Catalan dönüşümünün terimlerine Hankel dönüşümü uygulanmıştır. Bu dönüşümü $HCOL_{k,n}$ gösterilmiştir.

Hankel dönüşüm matrisinin tanımına göre;

- $HCOL_{k,1} = \det[COL_{k,1}] = 1 = OL_{k,1},$
- $HCOL_{k,2} = \det \begin{bmatrix} COL_{k,1} & COL_{k,2} \\ COL_{k,2} & COL_{k,3} \end{bmatrix} = \frac{k^4 - 4}{k^4} = OL_{k,4} - OL_{k,2} + OL_{k,1},$
- $HCOL_{k,3} = \det \begin{bmatrix} COL_{k,1} & COL_{k,2} & COL_{k,3} \\ COL_{k,2} & COL_{k,3} & COL_{k,4} \\ COL_{k,3} & COL_{k,4} & COL_{k,5} \end{bmatrix}$

$$= 4OL_{k,8} + 48OL_{k,7} - 234OL_{k,6} + 324OL_{k,5} - 141OL_{k,4},$$

şeklinde elde edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024a).

4.2.4. Hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonları

Aşağıda k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin hiperbolik kuaterniyonlar üzerine bir uygulaması yapılmıştır. Daha sonra bu uygulamanın Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve toplam formülleri gibi birçok özelliği bulunmuştur. Son olarak da k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri ve hiperbolik kuaterniyon değerleri ilişkilendirilmiştir.

Tanım 4.2.4.1. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları $\check{H}O_{k,n}$ ve hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonları $\check{H}OL_{k,n}$ sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\check{H}O_{k,n} = O_{k,n}i_1 + O_{k,n+1}i_2 + O_{k,n+2}i_3 + O_{k,n+3}i_4 = (O_{k,n}, O_{k,n+1}, O_{k,n+2}, O_{k,n+3})$$

ve

$$\check{H}OL_{k,n} = OL_{k,n}i_1 + OL_{k,n+1}i_2 + OL_{k,n+2}i_3 + OL_{k,n+3}i_4$$

$$= (OL_{k,n}, OL_{k,n+1}, OL_{k,n+2}, OL_{k,n+3}).$$

Burada $O_{k,n}$; n^{th} k -Oresme dizisinin terimidir, $OL_{k,n}$; n^{th} k -Oresme-Lucas dizisinin terimidir, i_1, i_2, i_3, i_4 ise Tablo 1'deki hiperbolik kuaterniyon değerleridir (Özkan ve Akkuş, 2024c).

Sırada bu dizilerin hiperbolik kuaterniyon değerlerinin ilk üç terimi yazılmıştır:

- $\check{H}O_{k,0} = \frac{1}{k}i_2 + \frac{1}{k}i_3 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 1)i_4,$
- $\check{H}O_{k,1} = \frac{1}{k}i_1 + \frac{1}{k}i_2 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 1)i_3 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 2)i_4,$
- $\check{H}O_{k,2} = \frac{1}{k}i_1 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 1)i_2 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 2)i_3 + \frac{1}{k^5}(k^4 - 3k^2 + 1)i_4,$

ve

- $\check{H}OL_{k,0} = 2i_1 + i_2 + \frac{1}{k^2}(k^2 - 2)i_3 + \frac{1}{k^2}(k^2 - 3)i_4,$
- $\check{H}OL_{k,1} = i_1 + \frac{1}{k^2}(k^2 - 2)i_2 + \frac{1}{k^2}(k^2 - 3)i_3 + \frac{1}{k^4}(k^4 - 4k^2 + 2)i_4,$
- $\check{H}OL_{k,2} = \frac{1}{k^2}(k^2 - 2)i_1 + \frac{1}{k^2}(k^2 - 3)i_2 + \frac{1}{k^4}(k^4 - 4k^2 + 2)i_3$
 $+ \frac{1}{k^4}(k^4 - 5k^2 + 5)i_4,$

şeklinde bulunmuştur (Özkan ve Akkuş, 2024c).

Tanım 4.2.4.2. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonlarının eşleniği $\check{H}O_{k,n}^*$ ve hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonlarının eşleniği $\check{H}OL_{k,n}^*$ sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\check{H}O_{k,n}^* = O_{k,n}i_1 - O_{k,n+1}i_2 - O_{k,n+2}i_3 - O_{k,n+3}i_4 = (O_{k,n}, -O_{k,n+1}, -O_{k,n+2}, -O_{k,n+3})$$

ve

$$\begin{aligned} \check{H}OL_{k,n}^* &= OL_{k,n}i_1 - OL_{k,n+1}i_2 - OL_{k,n+2}i_3 - OL_{k,n+3}i_4 \\ &= (OL_{k,n}, -OL_{k,n+1}, -OL_{k,n+2}, -OL_{k,n+3}). \end{aligned}$$

Tanım 4.2.4.3. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonlarının normu $\|\check{H}O_{k,n}\|$ ve hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonlarının normu $\|\check{H}OL_{k,n}\|$ sırasıyla şu şekilde tanımlanmıştır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\|\check{H}O_{k,n}\| = \sqrt{O_{k,n}^2 + O_{k,n+1}^2 + O_{k,n+2}^2 + O_{k,n+3}^2}$$

ve

$$\|\check{H}OL_{k,n}\| = \sqrt{OL_{k,n}^2 + OL_{k,n+1}^2 + OL_{k,n+2}^2 + OL_{k,n+3}^2}.$$

Aşağıdaki teoremlerde hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonlarının normu ve eşleniği arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 4.2.4.1. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

- i. $\check{H}O_{k,n+2} = \check{H}O_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} \check{H}O_{k,n},$
- ii. $\check{H}OL_{k,n+2} = \check{H}OL_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} \check{H}OL_{k,n},$
- iii. $\check{H}O_{k,n+2}^* = \check{H}O_{k,n+1}^* - \frac{1}{k^2} \check{H}O_{k,n}^*,$
- iv. $\check{H}OL_{k,n+2}^* = \check{H}OL_{k,n+1}^* - \frac{1}{k^2} \check{H}OL_{k,n}^*.$

İspat. Hiperbolik kuaterniyonlar ve dizilerin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \text{i. } \check{H}O_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} \check{H}O_{k,n} &= (O_{k,n+1}i_1 + O_{k,n+2}i_2 + O_{k,n+3}i_3 + O_{k,n+4}i_4) \\ &\quad - \frac{1}{k^2} (O_{k,n}i_1 + O_{k,n+1}i_2 + O_{k,n+2}i_3 + O_{k,n+3}i_4) \\ &= \left(O_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} O_{k,n}\right) i_1 + \left(O_{k,n+2} - \frac{1}{k^2} O_{k,n+1}\right) i_2 + \left(O_{k,n+3} - \frac{1}{k^2} O_{k,n+2}\right) i_3 \\ &\quad + \left(O_{k,n+4} - \frac{1}{k^2} O_{k,n+3}\right) i_4 \end{aligned}$$

elde edilmiştir. Böylece,

$$O_{k,n+2} = O_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} O_{k,n}$$

olduğuna göre

$$\check{H}O_{k,n+2} = \check{H}O_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} \check{H}O_{k,n}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{iv. } \check{H}OL_{k,n+1}^* - \frac{1}{k^2} \check{H}OL_{k,n}^* &= (OL_{k,n+1}i_1 - OL_{k,n+2}i_2 - OL_{k,n+3}i_3 - OL_{k,n+4}i_4) \\ &\quad - \frac{1}{k^2} (OL_{k,n}i_1 - OL_{k,n+1}i_2 - OL_{k,n+2}i_3 - OL_{k,n+3}i_4) \end{aligned}$$

$$= \left(OL_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} OL_{k,n} \right) i_1 + \left(OL_{k,n+2} - \frac{1}{k^2} OL_{k,n+1} \right) i_2 + \left(OL_{k,n+3} - \frac{1}{k^2} OL_{k,n+2} \right) i_3 \\ + \left(OL_{k,n+4} - \frac{1}{k^2} OL_{k,n+3} \right) i_4$$

elde edilmiştir. Böylece,

$$OL_{k,n+2} = OL_{k,n+1} - \frac{1}{k^2} OL_{k,n}$$

olduğuna göre

$$\check{H}OL_{k,n+2}^* = \check{H}OL_{k,n+1}^* - \frac{1}{k^2} \check{H}OL_{k,n}^*$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.2. $k \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

i. $\check{H}O_{k,n} + \check{H}O_{k,n}^* = 2O_{k,n}i_1,$

ii. $\check{H}O_{k,n}^2 = 2O_{k,n}\check{H}O_{k,n} + \left(\|\check{H}O_{k,n}\|^2 - 2O_{k,n}^2 \right) i_1,$

iii. $\check{H}OL_{k,n} + \check{H}OL_{k,n}^* = 2OL_{k,n}i_1,$

iv. $\check{H}OL_{k,n}^2 = 2OL_{k,n}\check{H}OL_{k,n} + \left(\|\check{H}OL_{k,n}\|^2 - 2OL_{k,n}^2 \right) i_1,$

v. $\check{H}O_{k,n}\check{H}O_{k,n}^* = \frac{1}{k^2-4} (OL_{k,2n} + OL_{k,2n+2} + OL_{k,2n+4} + OL_{k,2n+6} \\ - \frac{2}{k^{2n}} - \frac{2}{k^{2n+2}} - \frac{2}{k^{2n+4}} - \frac{2}{k^{2n+6}}),$

vi. $\check{H}OL_{k,n}\check{H}OL_{k,n}^* = OL_{k,2n+6} + OL_{k,2n+4} + OL_{k,2n+2} + OL_{k,2n}$

$$- \frac{2}{k^{2n}} - \frac{2}{k^{2n+2}} - \frac{2}{k^{2n+4}} - \frac{2}{k^{2n+6}}.$$

İspat. Hiperbolik kuaterniyonlar ve dizilerin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

ii. $\check{H}O_{k,n}^2 = (O_{k,n}i_1 + O_{k,n+1}i_2 + O_{k,n+2}i_3 + O_{k,n+3}i_4)(O_{k,n}i_1 + O_{k,n+1}i_2 + O_{k,n+2}i_3 \\ + O_{k,n+3}i_4)$

$$= (O_{k,n}^2 + O_{k,n+1}^2 + O_{k,n+2}^2 + O_{k,n+3}^2)i_1 + (2O_{k,n}O_{k,n+1})i_2 + (2O_{k,n}O_{k,n+2})i_3$$

$$\begin{aligned}
& + (2O_{k,n}O_{k,n+3})i_4 \\
& = 2O_{k,n}(O_{k,n}i_1 + O_{k,n+1}i_2 + O_{k,n+2}i_3 + O_{k,n+3}i_4) + (-O_{k,n}^2 + O_{k,n+1}^2 + O_{k,n+2}^2 + O_{k,n+3}^2)i_1.
\end{aligned}$$

yazılmıştır. Son eşitlikten ve hiperbolik kuaterniyonların normunun tanımı dikkate alınır

$$\check{H}O_{k,n}^2 = 2O_{k,n}\check{H}O_{k,n} + (\|\check{H}O_{k,n}\|^2 - 2O_{k,n}^2)i_1$$

elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{iii. } \check{H}OL_{k,n} + \check{H}OL_{k,n}^* &= (OL_{k,n+1}i_1 + OL_{k,n+2}i_2 + OL_{k,n+3}i_3 + OL_{k,n+4}i_4) \\
&+ (OL_{k,n+1}i_1 - OL_{k,n+2}i_2 - OL_{k,n+3}i_3 - OL_{k,n+4}i_4) \\
&= 2OL_{k,n+1}i_1.
\end{aligned}$$

Eşitlikleri elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.3. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\begin{aligned}
\text{i. } i_1\check{H}O_{k,n} - i_2\check{H}O_{k,n+1} - i_3\check{H}O_{k,n+2} - i_4\check{H}O_{k,n+3} &= (O_{k,n+6} - O_{k,n+4} - O_{k,n+2} + O_{k,n})i_1, \\
\text{ii. } i_1\check{H}OL_{k,n} - i_2\check{H}OL_{k,n+1} - i_3\check{H}OL_{k,n+2} - i_4\check{H}OL_{k,n+3} \\
&= (OL_{k,n+6} - OL_{k,n+4} - OL_{k,n+2} + OL_{k,n})i_1.
\end{aligned}$$

İspat. i. Hiperbolik kuaterniyonların ve dizinin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
i_1\check{H}O_{k,n} - i_2\check{H}O_{k,n+1} - i_3\check{H}O_{k,n+2} - i_4\check{H}O_{k,n+3} &= (O_{k,n} - O_{k,n+2} - O_{k,n+4} + O_{k,n+6})i_1 \\
&+ (O_{k,n+1} - O_{k,n+1} - O_{k,n+5} + O_{k,n+5})i_2 + (O_{k,n+2} + O_{k,n+4} - O_{k,n+2} - O_{k,n+4})i_3 \\
&+ (O_{k,n+3} - O_{k,n+3} + O_{k,n+3} - O_{k,n+3})i_4 \\
&= (O_{k,n+6} - O_{k,n+4} - O_{k,n+2} + O_{k,n})i_1
\end{aligned}$$

elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilmiştir.

Aşağıdaki teoremden hiperbolik k -Oresme, k -Oresme-Lucas kuaterniyonları ve eşleniklerinin Binet formülleri ifade edilmiştir.

Teorem 4.2.4.4. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre

i. $\check{H}O_{k,n} = \frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{(\alpha - \beta)k},$

ii. $\check{H}OL_{k,n} = \bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n,$

iii. $\check{H}O_{k,n}^* = \frac{\bar{\alpha}^*\alpha^n - \bar{\beta}^*\beta^n}{(\alpha - \beta)k},$

iv. $\check{H}OL_{k,n}^* = \bar{\alpha}^*\alpha^n + \bar{\beta}^*\beta^n,$

burada

$$\bar{\alpha} = i_1 + \alpha i_2 + \alpha^2 i_3 + \alpha^3 i_4 = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3),$$

$$\bar{\alpha}^* = (i_1 - \alpha i_2 - \alpha^2 i_3 - \alpha^3 i_4) = (1, -\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3),$$

$$\bar{\beta} = i_1 + \beta i_2 + \beta^2 i_3 + \beta^3 i_4 = (1, \beta, \beta^2, \beta^3),$$

$$\bar{\beta}^* = (i_1 - \beta i_2 - \beta^2 i_3 - \beta^3 i_4) = (1, -\beta, -\beta^2, -\beta^3)$$

şeklinde ifade edilmiştir (Özkan ve Akkuş, 2024c).

İspat. i. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonlarının Binet formülünün elde edilmesinde, ikinci dereceden doğrusal tekrarlılama bağıntıları için tanımlanan genel Binet formu kullanılmıştır:

$$\check{H}O_{k,n} = S\alpha^n + T\beta^n.$$

Farklı n değerlerine göre aşağıdaki denklem sistemi elde edilmiştir:

$$\check{H}O_{k,0} = \frac{1}{k}i_2 + \frac{1}{k}i_3 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 1)i_4 = x + y$$

$$\check{H}O_{k,1} = \frac{1}{k}i_1 + \frac{1}{k}i_2 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 1)i_3 + \frac{1}{k^3}(k^2 - 2)i_4 = S\alpha + T\beta.$$

Buradan

$$S = \frac{\check{H}O_{k,1} - \beta\check{H}O_{k,0}}{\alpha - \beta} = \frac{i_1 + \alpha i_2 + \alpha^2 i_3 + \alpha^3 i_4}{\alpha - \beta} = \frac{\bar{\alpha}}{(\alpha - \beta)k}$$

$$T = \frac{\check{H}O_{k,1} - \alpha\check{H}O_{k,0}}{\beta - \alpha} = \frac{i_1 + \beta i_2 + \beta^2 i_3 + \beta^3 i_4}{-(\alpha - \beta)} = \frac{-\bar{\beta}}{(\alpha - \beta)k}$$

elde edilmiştir. Böylece Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonlarının Binet formülü

$$\check{H}O_{k,n} = \frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{(\alpha - \beta)k}$$

şeklinde ifade edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonların özel toplam formülleri üzerine çalışma yapılmıştır.

Teorem 4.2.4.5. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\begin{aligned} \text{i. } \sum_{j=0}^n \check{H}O_{k,j} &= (1 - k^2)\check{H}O_{k,n} + \check{H}O_{k,n-1} + ki_1 + ki_2 - \frac{1+k^2}{k}i_3 + \frac{k^2-2}{k}i_4, \\ \text{ii. } \sum_{j=0}^n \check{H}OL_{k,j} &= (1 + k^2)\check{H}OL_{k,n} + \check{H}OL_{k,n-1} + 2k^2i_1 + (2k^2 - 2)i_2 + (2k^2 - 3)i_3 \\ &\quad + \frac{2k^4 - 4k^2 + 2}{k^2}i_4. \end{aligned}$$

İspat. i. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonların tekrarlama bağıntısı ve toplam sembolünün özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\sum_{j=0}^n \check{H}O_{k,j} = i_1 \sum_{j=0}^n O_{k,j} + i_2 \sum_{j=0}^n O_{k,j+1} + i_3 \sum_{j=0}^n O_{k,j+2} + i_4 \sum_{j=0}^n O_{k,j+3}$$

Böylece,

$$\sum_{j=0}^n O_{k,j} = k + O_{k,n-1} + (1 - k^2)O_{k,n}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \check{H}O_{k,j} &= (k + O_{k,n-1} + (1 - k^2)O_{k,n})i_1 + (k + O_{k,n} + (1 - k^2)O_{k,n+1})i_2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{k} - k + O_{k,n+1} + (1 - k^2)O_{k,n+2}\right)i_3 + \left(-\frac{2}{k} + k + O_{k,n+2} + (1 - k^2)O_{k,n+3}\right)i_4. \end{aligned}$$

şeklinde yazılmıştır. Buradan da

$$\sum_{j=0}^n \check{H}O_{k,j} = (1 - k^2)\check{H}O_{k,n} + \check{H}O_{k,n-1} + ki_1 + ki_2 - \frac{1+k^2}{k}i_3 + \frac{k^2-2}{k}i_4$$

elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.6. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x, y, z \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \sum_{y=0}^n \check{H}O_{k,xy} = \frac{\frac{1}{k^{2x}}\check{H}O_{k,nx} + \check{H}O_{k,0} - \check{H}O_{k,nx+x} + \check{H}OL_{k,0}O_{k,x} - \check{H}O_{k,x}}{1 - OL_{k,x} + \frac{1}{k^{2x}}},$$

$$\text{ii. } \sum_{y=0}^n \check{H}O_{k,xy} = \frac{\frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,nx} + \check{H}O_{k,0} - \check{H}O_{k,nx+x} - \check{H}O_{k,0} O_{k,x} - \check{H}O_{k,x}}{1 - O_{k,x} + \frac{1}{k^{2x}}},$$

$$\text{iii. } \sum_{y=0}^n \check{H}O_{k,xy+z} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,nx+z} - \check{H}O_{k,nx+x+z} - \check{H}O_{k,z} - \frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,x-z}}{1 - O_{k,x} + \frac{1}{k^{2x}}}, & z < x \\ \frac{\frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,nx+z} - \check{H}O_{k,nx+x+z} - \check{H}O_{k,z} - \frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,z-x}}{1 - O_{k,x} + \frac{1}{k^{2x}}}, & \text{diğer} \end{cases},$$

$$\text{iv. } \sum_{y=0}^n \check{H}O_{k,xy+z} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,nx+z} - \check{H}O_{k,z} - \check{H}O_{k,nx+x+z} - \frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,z-x}}{1 - O_{k,x} + \frac{1}{k^{2x}}}, & z < x \\ \frac{\frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,nx+z} - \check{H}O_{k,z} - \check{H}O_{k,nx+x+z} - \frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,z-x}}{1 - O_{k,x} + \frac{1}{k^{2x}}}, & \text{diğer} \end{cases}.$$

İspat. i. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonların Binet formülü ve karakteristik denkleminin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^n \check{H}O_{k,xy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha} \alpha^{xy} - \bar{\beta} \beta^{xy}}{(\alpha - \beta)k} \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{(\alpha - \beta)k} \sum_{y=0}^n (\alpha^x)^y - \frac{\bar{\beta}}{(\alpha - \beta)k} \sum_{y=0}^n (\beta^x)^y \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)k} \left(\frac{\bar{\alpha} \alpha^{nx+x} - \bar{\alpha}}{\alpha^x - 1} - \frac{\bar{\beta} \alpha^{nx+x} - \bar{\beta}}{\beta^x - 1} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)k} \frac{\bar{\alpha} \alpha^{nx+x} \beta^x - \bar{\alpha} \beta^x - \bar{\alpha} \alpha^{nx+x} + \bar{\alpha} - \bar{\beta} \beta^{nx+x} \alpha^x + \bar{\beta} \alpha^x + \bar{\beta} \beta^{nx+x} - \bar{\beta}}{1 - x O_{k,x} + \frac{1}{k^2} x^2}. \end{aligned}$$

Buradan da

$$\sum_{y=0}^n \check{H}O_{k,xy} = \frac{\frac{1}{k^{2x}} \check{H}O_{k,nx} + \check{H}O_{k,0} - \check{H}O_{k,nx+x} + \check{H}O_{k,0} O_{k,x} - \check{H}O_{k,x}}{1 - O_{k,x} + \frac{1}{k^{2x}}}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki teoremlerde hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonların özel üreteç fonksiyonları üzerine çalışma yapılmıştır.

Teorem 4.2.4.7. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \check{H}O_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,n} x^n = \frac{(1-x)k^2 \check{H}O_{k,0} + xk^2 \check{H}O_{k,1}}{k^2 - k^2 x + x^2},$$

$$\text{ii. } \check{H}OL_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}OL_{k,n}x^n = \frac{k^2x\check{H}OL_{k,1}+k^2(1-x)\check{H}OL_{k,0}}{k^2-k^2x+x^2}.$$

İspat. i. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonların tekrarlama bağıntısı ve toplam sembolünün özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \check{H}O_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,n}x^n = \check{H}O_{k,0} + \check{H}O_{k,1}x + \sum_{n=2}^{\infty} \check{H}O_{k,n}x^n \\ &= \check{H}O_{k,0} + \check{H}O_{k,1}x + \sum_{n=2}^{\infty} \check{H}O_{k,n-1}x^n - \frac{1}{k^2} \sum_{n=2}^{\infty} \check{H}O_{k,n-2}x^n \\ &= \check{H}O_{k,0} + \check{H}O_{k,1}x + x(-\check{H}O_{k,0} + \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,n}x^n) - \frac{x^2}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,n}x^n. \end{aligned}$$

Son eşitlikten gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\check{H}O_k(x) = \frac{(1-x)k^2\check{H}O_{k,0}+xk^2\check{H}O_{k,1}}{k^2-k^2x+x^2}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.8. $a, b, n \in \mathbb{N}$, $b \geq a$ ve $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,an}x^n = \frac{\check{H}O_{k,0}+(\check{H}OL_{k,0}OL_{k,a}-\check{H}O_{k,a})x}{1-xOL_{k,a}+\frac{1}{k^2a}x^2},$$

$$\text{ii. } \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}OL_{k,an}x^n = \frac{\check{H}OL_{k,0}+(-\check{H}OL_{k,0}OL_{k,a}+\check{H}OL_{k,a})x}{1-xOL_{k,a}+\frac{1}{k^2a}x^2},$$

$$\text{iii. } \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,an+b}x^n = \frac{\check{H}O_{k,b}-x\frac{1}{k^2a}\check{H}O_{k,b-a}}{1-xOL_{k,a}+\frac{1}{k^2a}x^2},$$

$$\text{iv. } \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}OL_{k,an+b}x^n = \frac{\check{H}OL_{k,b}+x\frac{1}{k^2a}\check{H}OL_{k,a}}{1-xOL_{k,a}+\frac{1}{k^2a}x^2},$$

$$\text{v. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\check{H}O_{k,bn}}{n!}x^n = \frac{\bar{\alpha}e^{\alpha^b x} - \bar{\beta}e^{\beta^b x}}{(\alpha-\beta)k},$$

$$\text{vi. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\check{H}OL_{k,bn}}{n!}x^n = \bar{\alpha}e^{\alpha^b x} + \bar{\beta}e^{\beta^b x}.$$

İspat. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonların tekrarlama bağıntısı, toplam sembolünün ve geometrik serilerin özellikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\text{i. } \sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,an}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}\alpha^{an} - \bar{\beta}\beta^{an}}{(\alpha-\beta)}x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\bar{\alpha}}{(\alpha-\beta)_k} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^a)^n x^n - \frac{\bar{\beta}}{(\alpha-\beta)_k} \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^a)^n x^n \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)_k} \left(\frac{\bar{\alpha}}{1-\alpha^a x} - \frac{\bar{\beta}}{1-\beta^a x} \right) \\
&= \frac{\frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{(\alpha-\beta)_k} + [(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) \left(\frac{\alpha^a-\beta^a}{(\alpha-\beta)_k} - \frac{\bar{\alpha}\alpha^a-\bar{\beta}\beta^a}{(\alpha-\beta)_k} \right) x]}{1-xOL_{k,a}+\frac{1}{k^2\alpha}x^2}.
\end{aligned}$$

Son eşitlikten gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \check{H}O_{k,an} x^n = \frac{\check{H}O_{k,0} + (\check{H}OL_{k,0}O_{k,a} - \check{H}O_{k,a})x}{1-xOL_{k,a}+\frac{1}{k^2\alpha}x^2}$$

eşitliği elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{vi. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\check{H}OL_{k,bn}}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}\alpha^{bn} + \bar{\beta}\beta^{bn}}{n!} x^n \\
&= \bar{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^b x)^n}{n!} + \bar{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^b x)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Son eşitlikten gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\check{H}OL_{k,bn}}{n!} x^n = \bar{\alpha} e^{\alpha^b x} + \bar{\beta} e^{\beta^b x}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıdaki yardımcı teoremden birçok teoremin ispatında kullanılacak olan hesaplamalar yapılmıştır.

Yardımcı Teorem 4.2.4.1. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \bar{\alpha} - \bar{\beta} = k\delta\check{H}O_{k,0},$$

$$\text{ii. } \bar{\alpha} + \bar{\beta} = \check{H}OL_{k,0},$$

$$\text{iii. } \bar{\alpha}^* - \bar{\beta}^* = k\delta\check{H}OL_{k,0}^*,$$

$$\text{iv. } \bar{\alpha}^* + \bar{\beta}^* = \check{H}OL_{k,0}^*,$$

$$\text{v. } \bar{\alpha}\bar{\beta} = (1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3, 1 - \delta\alpha^2\beta^2, \alpha^2 + \beta^2 + \delta\alpha\beta, \alpha^3 + \beta^3 - \delta\alpha\beta),$$

- vi. $\overline{\beta\alpha} = (1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3, 1 + \delta\alpha^2\beta^2, \alpha^2 + \beta^2 - \delta\alpha\beta, \alpha^3 + \beta^3 + \delta\alpha\beta),$
- vii. $\overline{\alpha\beta} + \overline{\beta\alpha} = 2\check{H}OL_{k,0} + (-2 + 2\alpha\beta + 2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\beta^3)i_1,$
- viii. $\overline{\alpha\beta} - \overline{\beta\alpha} = (0, \alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2, 2\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^3, -\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = \delta(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}),$
- ix. $\overline{\alpha^2} = 2\overline{\alpha} + (-1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6)i_1,$
- x. $\overline{\beta^2} = 2\overline{\beta} + (-1 + \beta^2 + \beta^4 + \beta^6)i_1,$
- xi. $\overline{\alpha^2} + \overline{\beta^2} = 2(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + (-2OL_{k,0} + OL_{k,2} + OL_{k,4} + OL_{k,6})i_1,$
- xii. $\overline{\alpha^2} - \overline{\beta^2} = 2(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) + \delta(OL_{k,2} + OL_{k,4} + OL_{k,6})i_1.$

İspat. Hiperbolik kuaterniyonların tanımı, k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \overline{\alpha} + \overline{\beta} &= (i_1 + \alpha i_2 + \alpha^2 i_3 + \alpha^3 i_4) + (i_1 + \beta i_2 + \beta^2 i_3 + \beta^3 i_4) \\
 &= (2i_1 + (\alpha + \beta)i_2 + (\alpha^2 + \beta^2)i_3 + (\alpha^3 + \beta^3)i_4) \\
 &= OL_{k,0}i_1 + OL_{k,1}i_2 + OL_{k,2}i_3 + OL_{k,3}i_4 \\
 &= \check{H}OL_{k,0}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v. } \overline{\alpha\beta} &= (i_1 + \alpha i_2 + \alpha^2 i_3 + \alpha^3 i_4)(i_1 + \beta i_2 + \beta^2 i_3 + \beta^3 i_4) \\
 &= i_1 + \alpha i_2 + \alpha^2 i_3 + \alpha^3 i_4 + \beta i_2 + \alpha\beta i_1 + \alpha^2\beta i_4 - \alpha^3\beta i_3 + \beta^2 i_3 - \alpha\beta^2 i_4 + \alpha^2\beta^2 i_1 \\
 &\quad + \alpha^3\beta^2 i_2 + \beta^3 i_4 + \alpha\beta^3 i_3 - \alpha^2\beta^3 i_2 + \alpha^3\beta^3 i_1.
 \end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\overline{\alpha\beta} = (1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta^3, 1 - \delta\alpha^2\beta^2, \alpha^2 + \beta^2 + \delta\alpha\beta, \alpha^3 + \beta^3 - \delta\alpha\beta)$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Aşağıda verilen teoremlerde hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonları için özel özdeşlikler hesaplanmıştır.

Teorem 4.2.4.9. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

i. Cassini Özdeşliği

- $\check{H}O_{k,n+1}\check{H}O_{k,n-1} - \check{H}O_{k,n}^2 = k^{-2n+2}(-1 - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^6}, -1 - \frac{1}{k^4}, \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^2}O_{k,3} - O_{k,3}, -O_{k,4}),$
- $\check{H}OL_{k,n+1}\check{H}OL_{k,n-1} - \check{H}OL_{k,n}^2 = k^{-2n+2}\delta^2(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6}, 1 - \frac{1}{k^4}, \frac{1}{k^2}OL_{k,2}, 1 - \frac{4}{k^2}).$

ii. Catalan Özdeşliği

- $\check{H}O_{k,n+r}\check{H}O_{k,n-r} - \check{H}O_{k,n}^2 = k^{-2n+2r}O_{k,r}((-1 - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^6})O_{k,r}, -O_{k,r} - \frac{1}{k^4}OL_{k,r}, -\frac{1}{k^4}O_{k,r} + \frac{1}{k^2}OL_{k,r}, -\frac{1}{k^6}O_{k,r} - \frac{1}{k^2}OL_{k,r}),$
- $\check{H}OL_{k,n+r}\check{H}OL_{k,n-r} - \check{H}OL_{k,n}^2 = k^{-2n+2r}O_{k,r}\delta^2((1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6})O_{k,r}, O_{k,r} - \frac{1}{k^4}OL_{k,r}, O_{k,r} + OL_{k,2} + \frac{1}{k^2}OL_{k,r}, O_{k,r} + OL_{k,3} - \frac{1}{k^2}OL_{k,r}).$

iii. Vajda Özdeşliği

- $\check{H}O_{k,n+r}\check{H}O_{k,n+m} - \check{H}O_{k,n}\check{H}O_{k,n+r+m} = k^{-2n}O_{k,r}((1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6})O_{k,m}, O_{k,m} + \frac{1}{k^4}OL_{k,m}, O_{k,m} + OL_{k,2} - \frac{1}{k^2}OL_{k,m}, O_{k,m} + OL_{k,3} + \frac{1}{k^2}OL_{k,m}),$
- $\check{H}OL_{k,n+r}\check{H}OL_{k,n+m} - \check{H}OL_{k,n}\check{H}OL_{k,n+r+m} = k^{-2n}O_{k,r}\delta^2((-1 - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^6})O_{k,m}, -O_{k,m} - \frac{1}{k^4}OL_{k,m}, -O_{k,m}OL_{k,2} + \frac{1}{k^2}OL_{k,m}, -O_{k,m}OL_{k,3} - \frac{1}{k^2}OL_{k,m}).$

iv. d'Ocagne Özdeşliği

- $\check{H}O_{k,m}\check{H}O_{k,r+1} - \check{H}O_{k,m+1}\check{H}O_{k,r} = k^{-2r}((1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6})O_{k,m-r}, O_{k,m-r} - \frac{1}{k^4}OL_{k,m-r}, O_{k,m-r}OL_{k,2} + \frac{1}{k^2}OL_{k,m-r}, O_{k,m-r}OL_{k,3} - \frac{1}{k^2}OL_{k,m-r}),$
- $\check{H}OL_{k,m}\check{H}OL_{k,r+1} - \check{H}OL_{k,m+1}\check{H}OL_{k,r} = k^{-2r}\delta^2((-1 - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^6})O_{k,m-r}, -O_{k,m-r} - \frac{1}{k^4}OL_{k,m-r}, -O_{k,m-r}OL_{k,2} - \frac{1}{k^2}OL_{k,m-r}, -O_{k,m-r}OL_{k,3} + \frac{1}{k^2}OL_{k,m-r}).$

İspat. i. Hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonların Binet formülü ve bu hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları için

$$\begin{aligned}
\check{H}O_{k,n+1}\check{H}O_{k,n-1} - \check{H}O_{k,n}^2 &= \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{n+1} - \bar{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{n-1} - \bar{\beta}\beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&= \frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}\alpha^n\beta^n + \bar{\beta}\bar{\alpha}\beta^n\alpha^n - \bar{\beta}\bar{\alpha}\beta^{n-1}\alpha^{n+1} - \bar{\alpha}\bar{\beta}\alpha^{n-1}\beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}k^{-2n}\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right) + \bar{\beta}\bar{\alpha}k^{-2n}\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta}\right)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&= \frac{k^{-2n}}{\alpha - \beta} \frac{\beta\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\bar{\beta}\bar{\alpha}}{\alpha\beta} = \frac{k^{-2n+2}}{\alpha - \beta} (\beta\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\bar{\beta}\bar{\alpha}).
\end{aligned}$$

Yardımcı teorem 4.2.4.1., kullanılarak

$$\begin{aligned}
\beta\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\bar{\beta}\bar{\alpha} &= (\beta - \alpha + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 - \alpha^4\beta^3 + \alpha^3\beta^4, \beta - \alpha - \alpha^4\beta^2 \\
&\quad + \alpha^2\beta^4, \alpha^2\beta - \alpha^3 + \beta^3 - \alpha\beta^2 + \alpha^3\beta^2 - \alpha^4\beta - \alpha\beta^4 - \alpha^2\beta^3, -\alpha^4 + \beta^4).
\end{aligned}$$

eşitliği bulunmuştur. Böylece bulunan ifadeler beraber düşünülürse

$$\begin{aligned}
\check{H}O_{k,n+1}\check{H}O_{k,n-1} - \check{H}O_{k,n}^2 &= k^{-2n+2} \left(-1 - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^6}, -1 - \frac{1}{k^4}, \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^2} O_{k,3} \right. \\
&\quad \left. - O_{k,3}, -O_{k,4} \right),
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir.

Hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonları için

$$\begin{aligned}
\check{H}OL_{k,n+1}\check{H}OL_{k,n-1} - \check{H}OL_{k,n}^2 &= (\bar{\alpha}\alpha^{n+1} + \bar{\beta}\beta^{n+1})(\bar{\alpha}\alpha^{n-1} + \bar{\beta}\beta^{n-1}) - (\bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n)^2 \\
&= k^{-2n+2} \delta(\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta} - \beta\bar{\beta}\bar{\alpha}).
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiştir. Buradan Yardımcı Teorem 4.2.4.1., kullanılarak

$$(\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta} - \beta\bar{\beta}\bar{\alpha}) = \delta \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6}, 1 - \frac{1}{k^4}, \frac{1}{k^2} OL_{k,2}, 1 - \frac{4}{k^2} \right).$$

elde edilmiştir. Böylece

$$\check{H}OL_{k,n+1}\check{H}OL_{k,n-1} - \check{H}OL_{k,n}^2 = k^{-2n+2} \delta^2 \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6}, 1 - \frac{1}{k^4}, \frac{1}{k^2} OL_{k,2}, 1 - \frac{4}{k^2} \right).$$

eşitliği bulunmuştur ve ispat tamamlanmıştır.

Aşağıdaki teoremlerde hiperbolik k -Oresme ve k -Oresme-Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkileri incelenmiştir.

Teorem 4.2.4.10. $k \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \check{H}O_{k,n} = \frac{2k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n+1} - \frac{k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n},$$

$$\text{ii. } \check{H}O_{k,n}^* = \frac{2k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n+1}^* - \frac{k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n}^*.$$

İspat. i. Hiperbolik kuaterniyonların ve dizinin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{2k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n+1} - \frac{k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n} &= \frac{2k}{k^2-4} (OL_{k,n+1}i_1 + OL_{k,n+2}i_2 + OL_{k,n+3}i_3 + OL_{k,n+4}i_4) \\ &\quad - \frac{k}{k^2-4} (OL_{k,n}i_1 + OL_{k,n+1}i_2 + OL_{k,n+2}i_3 + OL_{k,n+3}i_4) \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

$$O_{k,n} = \frac{2k}{k^2-4} OL_{k,n+1} - \frac{k}{k^2-4} OL_{k,n}$$

k -Oresme ile k -Oresme-Lucas dizileri arasındaki yukarıdaki bağıntı kullanılarak

$$\check{H}O_{k,n} = \frac{2k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n+1} - \frac{k}{k^2-4} \check{H}OL_{k,n}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilmiştir.

Teorem 4.2.4.11. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \check{H}OL_{k,n} = 2k\check{H}O_{k,n+1} - k\check{H}O_{k,n},$$

$$\text{ii. } \check{H}OL_{k,n}^* = 2k\check{H}O_{k,n+1}^* - k\check{H}O_{k,n}^*.$$

İspat. i. Hiperbolik kuaterniyonların ve dizinin tekrarlama bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2k\check{H}O_{k,n+1} - k\check{H}O_{k,n} &= 2k(O_{k,n+1}i_1 + O_{k,n+2}i_2 + O_{k,n+3}i_3 + O_{k,n+4}i_4) \\ &\quad - k(O_{k,n}i_1 + O_{k,n+1}i_2 + O_{k,n+2}i_3 + O_{k,n+3}i_4) \end{aligned}$$

olarak elde edilmiştir.

$$OL_{k,n} = 2kO_{k,n+1} - kO_{k,n}$$

k -Oresme ile k -Oresme-Lucas dizileri arasındaki yukarıdaki bağıntı kullanılarak

$$\check{H}OL_{k,n} = 2k\check{H}O_{k,n+1} - k\check{H}O_{k,n}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şikkın ispatı da benzer şekilde gösterilmiştir.

Teorem 4.2.4.12. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n, r \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

- i. $\check{H}O_{k,n}\check{H}O_{k,r} - \check{H}O_{k,r}\check{H}O_{k,n} = k^{-2n}O_{k,r-n}(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}),$
- ii. $\check{H}OL_{k,n}\check{H}OL_{k,r} - \check{H}OL_{k,r}\check{H}OL_{k,n} = k^{-2n}O_{k,r-n}\delta^2\left(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}\right),$
- iii. $\check{H}O_{k,r}\check{H}OL_{k,n} - \check{H}O_{k,n}\check{H}OL_{k,r} = k^{-2n}O_{k,r-n}\delta\left(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}\right),$

İspat. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonların Binet formülü ve bu hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{i. } \check{H}O_{k,n}\check{H}O_{k,r} - \check{H}O_{k,r}\check{H}O_{k,n} &= \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{k(\alpha - \beta)}\right) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^r - \bar{\beta}\beta^r}{k(\alpha - \beta)}\right) - \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^r - \bar{\beta}\beta^r}{k(\alpha - \beta)}\right) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{k(\alpha - \beta)}\right) \\ &= \frac{(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\beta}\bar{\alpha})(\alpha^n\beta^n)(\alpha^{r-n} - \beta^{r-n})}{k^2(\alpha - \beta)^2}. \end{aligned}$$

Son eşitlikte Yardımcı Teorem 4.2.4.1., kullanılırsa

$$\check{H}O_{k,n}\check{H}O_{k,r} - \check{H}O_{k,r}\check{H}O_{k,n} = k^{-2n}O_{k,r-n}\left(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}\right)$$

eşitlik bulunmuştur.

$$\begin{aligned} \text{ii. } \check{H}OL_{k,n}\check{H}OL_{k,r} - \check{H}OL_{k,r}\check{H}OL_{k,n} &= (\bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n)(\bar{\alpha}\alpha^r + \bar{\beta}\beta^r) - (\bar{\alpha}\alpha^r + \bar{\beta}\beta^r)(\bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n) \\ &= \frac{(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\beta}\bar{\alpha})\delta^2(\alpha^n\beta^n)(\alpha^{r-n} - \beta^{r-n})}{k^2(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}$$

Son eşitlikte Yardımcı Teorem 4.2.4.1., kullanılırsa

$$\check{H}OL_{k,n}\check{H}OL_{k,r} - \check{H}OL_{k,r}\check{H}OL_{k,n} = k^{-2n}O_{k,r-n}\delta^2\left(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}\right)$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilmiştir.

Aşağıdaki teoremlerde k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizilerinin terimlerini hiperbolik kuaterniyon değerleriyle ilişkilendirilmiştir.

Teorem 4.2.4.13. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n, r \in \mathbb{N}$ ve $r < n$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

- i. $OL_{k,r}\check{H}O_{k,n} = \check{H}O_{k,n+r} + \frac{1}{k^{2r}}\check{H}O_{k,n-r},$
- ii. $O_{k,r}\check{H}OL_{k,n} = \check{H}O_{k,n+r} - \frac{1}{k^{2r}}\check{H}O_{k,n-r},$
- iii. $OL_{k,r}\check{H}OL_{k,n} = \check{H}OL_{k,n+r} + \frac{1}{k^{2r}}\check{H}OL_{k,n-r}.$

İspat. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonlarının ve k -Oresme-Lucas dizisinin Binet formülü ve hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{i. } OL_{k,r}\check{H}O_{k,n} &= (\alpha^r + \beta^r) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{k(\alpha - \beta)} \right) = \frac{\bar{\alpha}\alpha^{n+r} - \bar{\beta}\beta^{n+r} + \bar{\alpha}\alpha^n\beta^r - \bar{\beta}\beta^n\alpha^r}{k(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{\bar{\alpha}\alpha^{n+r} - \bar{\beta}\beta^{n+r}}{k(\alpha - \beta)} + \frac{\alpha^r\beta^r(\bar{\alpha}\alpha^{n-r} - \bar{\beta}\beta^{n-r})}{k(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$\check{H}O_{k,n+r} + \frac{1}{k^{2r}}\check{H}O_{k,n-r} = OL_{k,r}\check{H}O_{k,n}$$

elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{iii. } OL_{k,r}\check{H}OL_{k,n} &= (\alpha^r + \beta^r)(\bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n) = \bar{\alpha}\alpha^{n+r} + \bar{\beta}\beta^{n+r} + \bar{\alpha}\alpha^r\beta^n + \bar{\beta}\beta^r\alpha^n \\ &= \bar{\alpha}\alpha^{n+r} + \bar{\beta}\beta^{n+r} + \alpha^r\beta^r(\bar{\alpha}\alpha^{n-r} + \bar{\beta}\beta^{n-r}) \end{aligned}$$

Son eşitlikten

$$\check{H}OL_{k,n+r} + \frac{1}{k^{2r}}\check{H}OL_{k,n-r} = OL_{k,r}\check{H}OL_{k,n}$$

elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.14. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n, r \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

i. $\check{H}O_{k,2n+r+1} = OL_{k,2n+1}\check{H}O_{k,r+1} + \frac{1}{k^2}O_{k,2n}\check{H}OL_{k,r},$

ii. $\check{H}OL_{k,2n+r+1} = OL_{k,2n+1}\check{H}OL_{k,r+1} + \delta^2 O_{k,2n}\check{H}O_{k,r}.$

İspat. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları, hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonları k -Oresme, k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

i. $OL_{k,2n+1}\check{H}O_{k,r+1} + \frac{1}{k^2}O_{k,2n}\check{H}OL_{k,r}$

$$= (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{r+1} - \bar{\beta}\beta^{r+1}}{k(\alpha - \beta)} \right) + \frac{1}{k^2} \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{k(\alpha - \beta)} \right) (\bar{\alpha}\alpha^r + \bar{\beta}\beta^r)$$

$$= \frac{1}{k(\alpha - \beta)} [\bar{\alpha}\alpha^{2n+r+1} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha k^2} \right) - \bar{\beta}\beta^{2n+r+1} \left(\beta + \frac{1}{\beta k^2} \right)].$$

Karakteristik denklemler arasındaki

$$\alpha + \beta = 1 \text{ ve } \alpha\beta = \frac{1}{k^2}$$

ilişkileri kullanılarak

$$\check{H}O_{k,2n+r+1} = OL_{k,2n+1}\check{H}O_{k,r+1} + \frac{1}{k^2}O_{k,2n}\check{H}OL_{k,r}.$$

eşitliği elde edilmiştir.

ii. $OL_{k,2n+1}\check{H}OL_{k,r+1} + \delta^2 O_{k,2n}\check{H}O_{k,r}$

$$= (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) (\bar{\alpha}\alpha^{r+1} + \bar{\beta}\beta^{r+1}) + \delta^2 \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{k(\alpha - \beta)} \right) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^r - \bar{\beta}\beta^r}{k(\alpha - \beta)} \right)$$

$$= \bar{\alpha}\alpha^{2n+r+1} \left(\alpha + \frac{1}{k^2\alpha} \right) + \bar{\beta}\beta^{2n+r+1} \left(\beta + \frac{1}{k^2\beta} \right)$$

Karakteristik denklemler arasındaki

$$\alpha + \beta = 1, \alpha = \frac{1}{k^2\beta} \text{ ve } \beta = \frac{1}{k^2\alpha}$$

bağıntıları kullanılarak

$$\check{H}OL_{k,2n+r+1} = OL_{k,2n+1}\check{H}OL_{k,r+1} + \delta^2 O_{k,2n}\check{H}O_{k,r}$$

eşitliği bulunmuştur ve ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.4.15. $k \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ ve $n, r \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \check{H}O_{k,2n+r+1} = \frac{k^2}{k^2-3} OL_{k,2n+1} \check{H}O_{k,r+3} + \frac{1}{(k^2-3)k^8} O_{k,2n-2} \check{H}OL_{k,r},$$

$$\text{ii. } \check{H}OL_{k,2n+r+1} = \frac{k^2}{k^2-3} OL_{k,2n+1} \check{H}OL_{k,r+3} + \frac{\delta^2}{k^2(k^2-3)} O_{k,2n-2} \check{H}O_{k,r}.$$

İspat. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları, hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonları k -Oresme, k -Oresme-Lucas dizilerinin Binet formülleri ve hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{k^2}{k^2-3} OL_{k,2n+1} \check{H}O_{k,r+3} + \frac{1}{(k^2-3)k^8} O_{k,2n-2} \check{H}OL_{k,r} \\ &= k^2 \frac{(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1})}{k^2-3} \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{r+3} - \bar{\beta}\beta^{r+3}}{k(\alpha-\beta)} \right) + \frac{1}{(k^2-3)k^8} \left(\frac{\alpha^{2n-2} - \beta^{2n-2}}{k(\alpha-\beta)} \right) (\bar{\alpha}\alpha^r + \bar{\beta}\beta^r) \\ &= \frac{1}{k(\alpha-\beta)} [\bar{\alpha}\alpha^{2n+r+1} \left(\frac{k^2}{k^2-3} \alpha^3 + \frac{1}{(k^2-3)k^8} \alpha^3 \right) - \bar{\beta}\beta^{2n+r+1} \left(\frac{k^2}{k^2-3} \beta^3 + \frac{1}{(k^2-3)k^8} \beta^3 \right)]. \end{aligned}$$

Karakteristik denklemler arasındaki

$$\alpha + \beta = 1, \alpha^3 + \beta^3 = \frac{k^2-3}{k^2} \text{ ve } \alpha\beta = \frac{1}{k^2}$$

bağıntıları kullanılarak

$$\check{H}O_{k,2n+r+1} = \frac{k^2}{k^2-3} OL_{k,2n+1} \check{H}O_{k,r+3} + \frac{1}{(k^2-3)k^8} O_{k,2n-2} \check{H}OL_{k,r}.$$

eşitliği elde edilmiştir.

Diğer şıkkın ispatı da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.16. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, ve $n, r, s, t \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \check{H}O_{k,n+r} = kO_{k,r} \check{H}O_{k,n+1} - \frac{1}{k} O_{k,r-1} \check{H}O_{k,n},$$

$$\text{ii. } \check{H}O_{k,n+2r} = OL_{k,r} \check{H}O_{k,n+r} - \frac{1}{k^{2r-2}} \check{H}O_{k,n},$$

$$\text{iii. } \check{H}O_{k,n+rt} = \frac{O_{k,rt}}{O_{k,r}} \check{H}O_{k,n+r} - \frac{1}{k^{2r-2}} \frac{O_{k,rt-r}}{O_{k,r}} \check{H}O_{k,n},$$

$$\text{iv. } k^{-2rt} O_{k,r(s-t)} \check{H}O_{k,n} = \check{H}O_{k,n+rt} O_{k,rs} - \check{H}O_{k,n+rs} O_{k,rt}.$$

İspat. i. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları ve k -Oresme dizilerinin Binet formülleri ve hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} kO_{k,r}\check{H}O_{k,n+1} - \frac{1}{k}O_{k,r-1}\check{H}O_{k,n} &= k\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{k(\alpha - \beta)}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{n+1} - \bar{\beta}\beta^{n+1}}{k(\alpha - \beta)}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha^{r-1} - \beta^{r-1}}{k(\alpha - \beta)}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{k(\alpha - \beta)}\right) \\ &= \frac{1}{k^2(\alpha - \beta)^2} [\bar{\alpha}\alpha^{n+r}\left(k\alpha - \frac{1}{k\alpha}\right) - \bar{\beta}\beta^{n+r}\left(k\beta - \frac{1}{k\beta}\right)]. \end{aligned}$$

Karakteristik denklemlerin özellikleri arasındaki

$$\alpha + \beta = 1 \text{ ve } \alpha\beta = \frac{1}{k^2}$$

bağıntıları kullanılarak

$$\check{H}O_{k,n+r} = kO_{k,r}\check{H}O_{k,n+1} - \frac{1}{k}O_{k,r-1}\check{H}O_{k,n}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.17. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n, r \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\text{i. } \check{H}O_{k,2n+r} = O_{k,2n}\check{H}O_{k,r+2} - \frac{1}{k^4}O_{k,2n-2}\check{H}O_{k,r},$$

$$\text{ii. } \check{H}OL_{k,2n+r} = kO_{k,2n}\check{H}OL_{k,r+2} - \frac{1}{k^3}O_{k,2n-2}\check{H}OL_{k,r},$$

$$\text{iii. } \check{H}O_{k,2n+r} = O_{k,2n}\check{H}OL_{k,r+1} - \frac{1}{k^2}OL_{k,2n-1}\check{H}O_{k,r},$$

$$\text{iv. } \check{H}OL_{k,2n+r} = k^2O_{k,2n}\delta^2\check{H}O_{k,r+1} + \frac{1}{k^2}OL_{k,2n-1}\check{H}OL_{k,r}.$$

İspat. iv. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları, hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonları, k -Oresme dizilerinin Binet formülleri ve hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} k^2O_{k,2n}\delta^2\check{H}O_{k,r+1} + \frac{1}{k^2}OL_{k,2n-1}\check{H}OL_{k,r} \\ &= k^2\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{k(\alpha - \beta)}(\alpha - \beta)^2\left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{r+1} - \bar{\beta}\beta^{r+1}}{k(\alpha - \beta)}\right) + \frac{1}{k^2}(\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1})(\bar{\alpha}\alpha^r + \bar{\beta}\beta^r) \\ &= \bar{\alpha}\alpha^{2n+r}\left(\alpha + \frac{1}{k^2\alpha}\right) + \bar{\beta}\beta^{2n+r}\left(\beta + \frac{1}{k^2\beta}\right). \end{aligned}$$

Karakteristik denklemlerin özellikleri arasındaki $\alpha\beta = \frac{1}{k^2}$ bağıntısı kullanılarak

$$\check{H}OL_{k,2n+r} = k^2 O_{k,2n} \delta^2 \check{H}O_{k,r+1} + \frac{1}{k^2} OL_{k,2n-1} \check{H}OL_{k,r}$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Diğer şıkların ispatları da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.2.4.18. $k \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlik doğrudur (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$(k^2 - 4)\check{H}O_{k,n}^2 - \check{H}OL_{k,n}^2 = -\frac{2}{k^{2n}}\delta(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}).$$

İspat. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları ve hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonlarının Binet formülleri ve hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} (k^2 - 4)\check{H}O_{k,n}^2 - \check{H}OL_{k,n}^2 &= (k^2 - 4) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{k(\alpha - \beta)} \right) \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^n - \bar{\beta}\beta^n}{k(\alpha - \beta)} \right) - (\bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n)(\bar{\alpha}\alpha^n + \bar{\beta}\beta^n) \\ &= -2\bar{\alpha}\bar{\beta}\alpha^n\beta^n - 2\bar{\beta}\bar{\alpha}\beta^n\alpha^n \\ &= -2\alpha^n\beta^n(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\beta}\bar{\alpha}). \end{aligned}$$

Son eşitlikten Yardımcı Teorem 4.2.4.1., kullanılırsa

$$(k^2 - 4)\check{H}O_{k,n}^2 - \check{H}OL_{k,n}^2 = -\frac{2}{k^{2n}}\delta(0, -\frac{1}{k^4}, \frac{2}{k^2}, -\frac{1}{k^2}).$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.4.19. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n, r, s \in \mathbb{N}$ ve $n, r > s$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Özkan ve Akkuş, 2024c):

$$\check{H}O_{k,n+r}\check{H}OL_{k,n+s} - \check{H}O_{k,n+s}\check{H}OL_{k,n+r} = \frac{2}{k^{2n+2s}}O_{k,r-s}(\check{H}OL_{k,0} + (-1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6})i_1).$$

İspat. Hiperbolik k -Oresme kuaterniyonları, hiperbolik k -Oresme-Lucas kuaterniyonları, k -Oresme dizisinin Binet formülleri ve hiperbolik kuaterniyonların karakteristik denkleminin özellikleri kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \check{H}O_{k,n+r}\check{H}OL_{k,n+s} - \check{H}O_{k,n+s}\check{H}OL_{k,n+r} &= \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{n+r} - \bar{\beta}\beta^{n+r}}{k(\alpha - \beta)} \right) (\bar{\alpha}\alpha^{n+s} + \bar{\beta}\beta^{n+s}) - \left(\frac{\bar{\alpha}\alpha^{n+s} - \bar{\beta}\beta^{n+s}}{k(\alpha - \beta)} \right) (\bar{\alpha}\alpha^{n+r} + \bar{\beta}\beta^{n+r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}\alpha^{n+r}\beta^{n+s} - \bar{\beta}\bar{\alpha}\alpha^{n+s}\beta^{n+r} - \bar{\alpha}\bar{\beta}\alpha^{n+s}\beta^{n+r} + \bar{\beta}\bar{\alpha}\alpha^{n+r}\beta^{n+s}}{k(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{\alpha^n\beta^n\alpha^s\beta^s(\alpha^{r-s}-\beta^{r-s})}{k(\alpha-\beta)}(\bar{\alpha}\bar{\beta} + \bar{\beta}\bar{\alpha}).
\end{aligned}$$

Son eşitlikten Yardımcı Teorem 4.2.4.1., kullanılırsa

$$\check{H}O_{k,n+r}\check{H}OL_{k,n+s} - \check{H}O_{k,n+s}\check{H}OL_{k,n+r} = \frac{2}{k^{2n+2s}}O_{k,r-s}(\check{H}OL_{k,0} + (-1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6})i_1)$$

eşitliği elde edilmiştir ve ispat tamamlanmıştır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Bu tez çalışmasında, klasik sayı dizileri ile hiperkompleks cebirsel yapılar arasındaki köprüler genişletilerek literatüre iki özgün dizi ailesi ve bunların ileri düzey dönüşüm uygulamaları kazandırılmıştır. Elde edilen temel teorik sonuçlar, çalışmanın iki ana simetrik eksenini doğrultusunda şu şekilde özetlenebilir:

1. Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas Yapılarına İlişkin Sonuçlar:

- Klasik Fibonacci yapısı bakır oranı ($4.23606797749979\dots$) parametresiyle genelleştirilerek Bakır Fibonacci ve Bakır Lucas dizilerinin matematiksel altyapısı kurulmuştur.
- Bu dizilerin ardışık terimlerinin oranlarının limit durumunda doğrudan bakır oranına yakınsadığı teorik olarak ispatlanmıştır.
- Bakır Fibonacci ile Bakır Lucas dizileri arasında özgün matematiksel bağıntılar keşfedilmiştir. Bu bağıntılar, dizilerin birlikte ele alınarak değerlendirilmesi sonucunda ortaya çıkarılmış ve dizilerin aralarındaki karşılıklı ilişkiler zengin bir biçimde sergilenmiştir.
- Dizilerin Catalan dönüşümleri ve bu dönüşüm matrislerine uygulanan Hankel determinant süreçleri sonucunda, klasik Fibonacci dizisinin tek indisli terimlerini veren $HCCF_n = F_{2n-1}$ gibi estetik ve orijinal kombinatorial kimlikler keşfedilmiştir.
- Dört boyutlu hiperbolik cebir üzerindeki yansımalarında, kuaterniyon bazlı Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları elde edilerek, dizilerin klasik sayı teorisindeki esnek yapısını koruduğu ve klasik Fibonacci dizisiyle aynı simetride $(-1)^n$ formunda bir Cassini özdeşliği ürettiği kanıtlanmıştır.

2. k -Oresme ve k -Oresme-Lucas Yapılarına İlişkin Sonuçlar:

- Klasik Oresme dizisi, k parametresine bağlı reel katsayılı doğrusal tekraralama bağıntılarıyla yeniden tanımlanarak k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri literatüre dahil edilmiştir.
- Bu dizilerin limit davranışlarının, karakteristik denklemin büyük kökü olan α değerine yakınsadığı raporlanmıştır.

- k -Oresme ve k -Oresme-Lucas dizileri arasındaki matematiksel etkileşimler araştırılmış ve bu araştırmalar sonucunda iki dizi arasında yeni bağıntılar türetilerek teorik yapılarına önemli katkılar sağlanmıştır.
- k -Oresme ailesinin Catalan-Hankel dönüşüm haritaları çıkarılarak, dönüşüm terimlerinin doğrusal cebirsel matris çarpımları vasıtasıyla açık formda hesaplanabileceği gösterilmiştir.
- Hiperbolik kuaterniyon uygulamalarında, bu dizilerin Cassini özdeşliğinde k parametresine bağlı bir azalma oranı $-\frac{1}{k^{2n}}$ sergilediği tespit edilmiş; böylece klasik yapılardan ayrılan asimptotik ve yapısal karakteristiği net bir şekilde ortaya konmuştur.

Sonuç olarak tezin bütünü, soyut dizi teorisinde üretilen yeni genellemelerin dönüşümler altında nasıl davrandığını ve çok boyutlu uzaylarda nasıl geometrik/cebirsal anlamlar kazandığını yapısal bir bütünlük içinde ortaya koymuştur. Ayrıca her iki yapı da ikinci dereceden lineer yineleme bağıntıları altında incelenmiş, aynı metodoloji (karakteristik denklem, Binet formülü, Catalan dönüşümü, Hankel dönüşümü ve hiperbolik kuaterniyon yaklaşımı) kullanılarak ortak bir çerçeve içerisinde değerlendirilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada ortaya konulan teorik çerçeve ve metodoloji, gelecekteki araştırmalar için şu potansiyel alanları barındırmaktadır:

- Farklı Dizi Genellemeleri: Tezde kullanılan yaklaşım, Perrin ve Padovan gibi farklı doğrusal tekrarlama bağıntısına sahip dizilere uyarlanarak bu dizilerin Catalan ve Hankel dönüşümleri incelenebilir.
- Karmaşık Cebirsel Yapılar: Tanımlanan dizilerin sadece hiperbolik kuaterniyonlar değil; oktoniyonlar, sedeniyonlar veya bikuaterniyonlar gibi daha karmaşık hiperkompleks sayı sistemleri üzerindeki davranışları araştırılabilir.
- Uygulamalı Matematik ve Şifreleme: Elde edilen özgün özdeşliklerin ve Hankel determinant yapılarının; kriptografi, sinyal işleme veya görüntü kodlama gibi alanlardaki pratik uygulama potansiyelleri değerlendirilebilir.

KAYNAKÇA

- Akkuş, H., Üregen, R. N., & Özkan, E. (2021). *A new approach to k -Jacobsthal Lucas sequences*. Sakarya University Journal of Science, 25(4), 969-973.
- Al-Homidan, S. (2012). *Hankel matrix transforms and operators*. Journal of Inequalities and Applications, 2012(1), 1-9.
- Aydin, F. T. (2018). *Hyperbolic k -Fibonacci quaternions*. arXiv preprint arXiv:1812.00781.
- Barry, P. (2005). A Catalan transform and related transformations on integer sequences. Journal of Integer Sequences, 8(4), 1-24.
- Barry, P. (2019). *Generalized Catalan Numbers Associated with a Family of Pascal-like Triangles*. Journal of Integer Sequences, 22(5), 1-50.
- Brod, D., & Michalski, A. (2022). *On generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers*. In Annales Mathematicae Silesianae, 36(2), 115-128.
- De Spinadel, V. W. (1998). *The metallic means and design*. Nexus II: Architecture and Mathematics, 5, 143-157.
- Devi, B. M., & Devibala, S. (2021). *The Exponential Generating Functions of Mersenne and Mersenne-Lucas Identities*. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 12(14), 739-747.
- Djordjević, G. B. (2004). *Generating functions of the incomplete generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers*. The Fibonacci Quarterly, 42(2), 106-113.
- Tasci, D., & Tas, Z. K. (2019). *On Generalized Lucas and Pell-Lucas Sequences*. Journal of Science and Arts, 19(3), 637-646.
- Falcon, S. (2011). *On the k -Lucas numbers*. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6(21), 1039-1050.
- Falcon, S. (2012). *On the k -Lucas numbers of arithmetic indexes*. Applied Mathematics, 3(10), 1202-1206.
- Falcon, S. (2013). *Catalan transform of the k -Fibonacci sequence*. Communications of the Korean Mathematical Society, 28(4), 827-832.
- Falcon, S., & Plaza, A. (2007). *The k -Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle*. Chaos, Solitons & Fractals, 33(1), 38-49.

- Falcon, S., & Plaza, A. (2008). *On the 3-dimensional k -Fibonacci spirals*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 38(4), 993-1003.
- Falcon, S., & Plaza, A. (2009). *On k -Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3), 1005-1019.
- Godase, A. D. (2021). *Hyperbolic k -Fibonacci and k -Lucas quaternions*. *The Mathematics Student*, 90(1-2), 103-116.
- Godase, A. D. (2023). *On some new identities of hyperbolick-Fibonacci and k -Lucas Quaternions*. *Research Square*, 1, 1-12.
- Horadam, A. F. (1974). *Oresme numbers*. *The Fibonacci Quarterly*, 12(3), 267-270.
- Horadam, A. F. (1996). *Jacobsthal representation numbers*. *The Fibonacci Quarterly*, 34(1), 40-54.
- Kolodner, I. I. (1965). *On a generating function associated with generalized Fibonacci sequences*. *The Fibonacci Quarterly*, 3(4), 272-278.
- Koshy, T. (1998). *New Fibonacci and Lucas identities*. *The Mathematical Gazette*, 82(495), 481-184.
- Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons, Inc., Canada.
- Koshy, T. (2014). *Pell and Pell–Lucas Numbers*. In *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*. New York, NY: Springer New York.
- Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Volume 2, John Wiley & Sons.
- Koshy, T., & Salmassi, M. (2006). *Parity and primality of Catalan numbers*. *The College Mathematics Journal*, 37(1), 52.
- Larcombe, P. J. (1999). *The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers*. *Mathematical Spectrum*, 32(1), 5-6.
- Layman, J. W. (2001). *The Hankel transform and some of its properties*. *Journal of Integer Sequences*, 4(1), 1-11.
- Macfarlane, A. (1902). *Hyperbolic quaternions*. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 23, 169-180.

- Melham, R. (1999). Sums involving Fibonacci and Pell numbers. *Portugaliae Mathematica*, 56(3), 309-318.
- Özkan, E., & Akkuş, H. (2024a). A new approach to k -Oresme and k -Oresme-Lucas sequences. *Symmetry*, 16(11), 1407.
- Özkan, E., & Akkuş, H., (2024b). Copper ratio obtained by generalizing the Fibonacci sequence. *AIP Advances*, 14(7), 1-11.
- Özkan, E., & Akkuş, H., (2024c). Hyperbolic k -Oresme and k -Oresme-Lucas Quaternions. *Proof*, 4, 141-149.
- Özkan, E., Taştan, M., & Güngör, O. (2020). Catalan transform of the k -lucas numbers. *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 13(1), 145-149.
- Saba, N., & Boussayoud, A. (2021). On the bivariate Mersenne Lucas polynomials and their properties. *Chaos, Solitons & Fractals*, 146, 110899.
- Saba, N., Boussayoud, A., & Kanuri, K. V. (2021). Mersenne Lucas numbers and complete homogeneous symmetric functions. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 24(2), 127-139.
- Sloane, N. J. (2008). *The on-line encyclopedia of integer sequences*. OEIS, <https://oeis.org/>
- Solinas, J. A. (1999). *Generalized mersenne numbers*. Faculty of Mathematics, University of Waterloo.
- Soykan, Y. (2021). *Generalized Oresme Numbers*. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 7(2), 333-367.
- Stanimirović, S., Stanimirović, P., Miladinović, M., & Ilić, A. (2009). Catalan matrix and related combinatorial identities. *Applied mathematics and computation*, 215(2), 796-805.
- Vajda, S. (2008). *Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: theory and applications*. Courier Corporation.
- Walker, I. (2011). *Explorations in recursion with John Pell and the Pell sequence: Recurrence relations and their explicit formulas*. (Master's thesis), Portland State University, MST 501.
- Yesilyurt, I., & Degirmen, N. (2025). Non-Newtonian Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers: A new look. *Filomat*, 39(4), 1093-1109.