

T.C.  
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA DİNAMİK PROGRAMLAMA VE  
SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Yaren TANRIVERDİ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

TEZ JÜRİ ÜYELERİ

Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

Dr. Öğr. Üyesi İsrail OKUMUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERZİNCAN, 2025

© 2025 [Yaren TANRIVERDİ]. Tüm hakları saklıdır.

## Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR danışmanlığında, Yaren TANRIVERDİ tarafından hazırlanan bu çalışma 25/07/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği (3/3) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İsrail OKUMUŞ İmza:

Yukarıdaki Yüksek Lisans/Doktora Tezi Enstitü Yönetim Kurulunun .... / .... / 20.... tarih ve ...../..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

**Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR**  
Enstitü Müdür V.

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## **Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası**

“Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Dinamik Programlama ve Sabit Nokta Teoremleri” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 25/07/2025

(İmza)

**Yaren TANRIVERDİ**

## ÖZET

# GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA DİNAMİK PROGRAMLAMA VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Yaren TANRIVERDİ

Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

2025, 78 sayfa

Bu çalışmada, sabit nokta alanında yapılan çalışmalarda bazı önemli hususlar üzerinde durulmuştur. Dönüşümlerin genelleştirilmesi ve değiştirilmesi, üzerinde çalışılan uzayların çeşitli genelleştirmeleri ve bu uzaylarda değişen sabit nokta teoremleri örneklerle birlikte ele alınmıştır. Mustafa ve Sims (2006) tarafından tanıtılan G-metrik uzaylarda metrik uzayların ve sabit nokta teorisinin pratik uygulamalarını araştırarak, diğer genel metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin gelişen yapısını vurgulanarak, Lipschitz tipi dönüşümler için sabit nokta teoremleri üzerine elde edilen çeşitli sonuçları kapsamıştır. Bu metrik uzaylar tam metrik uzay olduğunda üzerine dönüşümler için yeni ortak sabit nokta teoremlerine katkıda bulunarak önceki sonuçların genişlemeleri verilmiştir. Sunulan sonuçlar uygulamalarla desteklenmiştir: dinamik programlamada bazı fonksiyonel denklem sistemleri için ortak çözümleri, graf teori ve integral tip büzölmeler. Kısaca, modöler G-metrik ve modöler b-metrik uzaylarda sabit nokta teorisindeki gelişmelerin kısa bir analizini sunulmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Büzölme, çakışma noktası, dinamik programlama, G- metrik uzaylar, graf teori, integral tip büzölme, metrik uzaylar, ortak sabit nokta, sabit nokta

## ABSTRACT

# DYNAMIC PROGRAMMING AND FIXED POINT THEOREMS IN GENERALIZED METRIC SPACES

Yaren TANRIVERDİ

Master's Thesis, Erzincan Binali Yıldırım University, Institute of Science and  
Technology,

Department of Mathematics

Advisor: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

2025, 78 pages

In this study, several important aspects of research in the field of fixed point theory are highlighted. The generalization and modification of mappings, various generalizations of the underlying spaces, and the corresponding variations of fixed point theorems in these spaces are discussed with illustrative examples. By investigating the practical applications of metric spaces and fixed point theory in G-metric spaces introduced by Mustafa and Sims (2006), the evolving structure of fixed point theorems in other generalized metric spaces is emphasized, and various results concerning fixed point theorems for Lipschitz-type mappings are included. When these metric spaces are complete, new common fixed point theorems for certain mappings are established, providing extensions of previous results. The presented findings are further supported by applications, including common solutions for some systems of functional equations in dynamic programming, graph theory, and integral-type contractions. In summary, a concise analysis of the recent developments in fixed point theory within modular G-metric and modular b-metric spaces is provided.

**Keywords:** Coincidence point, Common fixed point, Contraction, Dynamic programming, Fixed point, G-metric spaces, Graph theory, Integral-type contraction, Metric spaces

## TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen değerli danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR'a, sevgili aileme ve değerli katkılarını sunan sayın jüri üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yaren TANRIVERDİ

Temmuz, 2025

# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	v
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Ön Bilgiler .....	2
1.1.1. Metrik uzay.....	2
1.1.2. Cauchy dizisi .....	2
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR .....	4
2.1. Bazı Dönüşümler ve Sabit Noktaları .....	4
2.1.1. Leader tipi.....	4
2.1.2. Adsız tür .....	4
2.1.3. Subrahmanyam tipi.....	4
2.1.4. Caristi tipi .....	4
2.2. Dinamik Programlama.....	17
3. YÖNTEM .....	20
4. BULGULAR .....	25
4.1. Bazı Tanımlar .....	27
4.2. Bazı Sonuçlar.....	29
4.3. Bazı Sonuçlar.....	41
4.4. Graf Teori Uygulaması.....	59
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	64
5.1. İntegral Tip Büzülmelerde Uygulaması .....	64
5.2. Diğer Metrik Uzaylara Genişletilmesi.....	72
KAYNAKÇA .....	73

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$d$	Metrik fonksiyonu gösterimi
$(X, d)$	Metrik Uzay
$\{x_n\}$	$\forall n \in N$ için verilen dizi gösterimi
$N$	Doğal sayılar kümesi
$R$	Reel sayılar kümesi
$C(A, S)$	$A$ ve $S$ 'nin çakışma noktaları kümesi
$(E, \leq)$	Kısmi sıralama bağıntısı $\leq$ ile verilen $E$ kümesi
$I_X$	$X$ 'deki birim dönüşüm
$(X, A, d)$	$C^*$ -cebri değerli metrik uzayı
$(X, A, G)$	$C^*$ -cebri değerli $G$ -metrik uzayı
$(X, A, G_A)$	$C^*$ -cebri değerli $G$ -metrik uzayı( $A$ ' ya göre)
$\{C_n\}$	$A$ ' ya göre Cauchy dizisi
$(X, \omega^G)$	Modüler bir $G$ -metrik uzay
$X_{\omega^G}$	Tam modüler $G$ -metrik uzay
$(X, A, \omega^G)$	$\omega^G$ -tam $C^*$ -cebri değerli modüler $G$ -metrik
$Y_{\omega^G}$	Tam modüler $G$ -metrik uzay
$(S, \eta)$	$b$ -metrik uzay
$S_\ell^*$	$\ell, S$ üzerinde ikili bir işlem olmak üzere modüler uzay
$C$	$C$ -sınıfı fonksiyon
$\{\xi_q\}$	$\ell$ -Cauchy dizisi
PJO	Picard-Jungck operatörü
PO	Picard operatörü
WPO	Zayıf Picard operatörü
WPJO	Zayıf Picard-Jungck operatörü
QPJO	Quasi Picard-Jungck operatörü
QWPJO	Yarı zayıf Picard-Jungck operatörü
Mod-b-Met-U	Modüler $b$ -metrik uzay

## 1. GİRİŞ

Son yıllarda metrik uzayların ve çeşitli bilimsel ve mühendislik disiplinlerindeki çeşitli uygulamalarının giderek artan önemi açıkça ortaya çıkmıştır. Bu gelişme, metrik uzaylardaki sabit nokta teorisinin öne çıkmasına özellikle yol açmıştır; bu da eşitsizlikler, dinamik programlama, yaklaşım teorisi, optimizasyon teorisi, görüntü restorasyonu ve filtreleme gibi alanlarda pratik kullanımını göstermektedir. Yapılan çalışmaları daha iyi aktarabilmek amacıyla, ön bilgiler kısmında, Sabit Nokta Teorisi ile ilgili bilinmesi gereken temel bazı tanımlara yer verilmiştir. Kavramsal çerçeve kısmında, teoride kullanılan bazı dönüşüm çeşitleri ve bu dönüşümler yardımıyla bulunan sabit noktalar incelenmiştir. Buradaki çeşitlilik, teoride büzülme dönüşümlerinin ne denli farklılaşabileceğine örnek olmaktadır.

Mustafa ve Sims tarafından 2006 yılında tanıtılan  $G$ -metrik uzaylar ve bu uzay ile ilgili çalışmalar sabit nokta teorisinde de araştırılmıştır (Jiddah vd. (2023)). Jiddah vd. çalışmalarında,  $G$ -metrik uzaylarla ilgili çeşitli sonuçların kapsamlı bir gözden geçirmesini yapılarak,  $G$ -metrik uzaylardaki Lipschitz tipi eşlemeler için sabit nokta teoremlerine ve bu teoremlerin genişlemelerine ve  $G$ -metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerinin gelişen yapısına kısa bir genel bakış sunulmaktadır. Çalışmalarının temel amacı,  $G$ -metrik uzayların sabit nokta teorisindeki önemli gelişmeleri güncel bir analizle incelemektir. Tezin yöntem bölümünde,  $G$ -metrik uzayların daha genel durumlarından biri olan modüler  $G$ -metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ele alınmıştır.

$C^*$ -cebri değerli modüler  $G$ -metrik uzayların yapısı kurulurken kullanılan yöntemle odaklanılmıştır. Yöntem bölümünde elde edilen bu kavrayış ile bulgular bölümünde, modüler  $b$ -metrik yapısı modüler  $G$ -metrik yapısı yardımıyla kurulmuş ve üzerinde nasıl dönüşümlerin kullanılabileceği ve sabit nokta teoremlerinin yapısı incelenmiştir. Graf teorisine kısa bir uygulaması örnek amacıyla verilmiştir. Tartışma ve sonuç bölümünde ise, diğer metrik uzaylara bu yapıların nasıl genelleştirilebileceği integral tip büzülme üzerinden irdelenmiştir.

Özetle, bu çalışmada, geliştirilmiş metrik uzaylardaki sabit nokta teorisinin gözden geçirilmesinden elde edilen sonuçlar ile yeni sabit nokta teoremlerini kurarak metrik uzay teorisi ve çeşitli uygulamalarına ilişkin devam eden tartışmalara katkıda bulunulması amaçlanmıştır.

## 1.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde, sabit nokta hakkında gerekli bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

### 1.1.1. Metrik uzay

**Tanım 1.**  $X$  boştan farklı bir küme olsun. O zaman:

$$\begin{aligned} d &: X \times X \rightarrow R^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

$d$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa,  $X$  üzerinde bir metrik olarak kabul edilir:

- i)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii)  $\forall x, y \in X \Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$
- iii)  $\forall x, y, z \in X \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Öyleyse,  $(X, d)$  ikilisine de metrik uzay denir (Acar, 2016).

### 1.1.2. Cauchy dizisi

**Tanım 2.**  $(X, d)$  metrik uzaydaki bir dizi  $\{x_n\}$  verilsin ve bu dizi eğer aşağıdaki koşul sağlıyorsa bir Cauchy dizisi olarak adlandırılır (Acar, 2016).

$\forall \varepsilon > 0$  için  $\forall n, m > N_\varepsilon$  vardır ki  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\exists N_\varepsilon > 0$  doğal sayısı var.

(Ayrıca;  $\forall n, m \rightarrow \infty$  için  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  şeklinde de gösterilebilir.)

**Tanım 3.**  $(X, d)$  metrik uzayda  $T: X \rightarrow X$  fonksiyonu  $T(x) = x$  koşulunu her  $x \in X$  noktasına verilen fonksiyonun sabit noktası denir.

$$d(Tx, Ty) \leq \rho d(x, y)$$

$(X, d)$  metrik uzay ve  $T: X \rightarrow X$  fonksiyonu verilsin. Her  $x, y \in X$  için yukarıda verilen eşitsizliği sağlayacak şekilde bir  $\rho \in (0, 1)$  sabiti varsa  $T$  fonksiyonuna büzülme fonksiyonu denir (Taş, 2017).

**Tanım 4.**  $d(Tx, Ty) \leq \rho \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$

$(X, d)$  metrik uzayda  $T: X \rightarrow X$  fonksiyonu verilsin. Fonksiyonunun bir büzülme olması için gerekli ve yeterli şart yukarıda verilen eşitsizliği  $\rho$  ve her  $x, y \in X$  için sağlamasıdır (Taş, 2017).

**Teorem 1.**  $(X, d)$  metrik uzayda  $T: X \rightarrow X$  fonksiyonu verilsin. Aşağıda verilen eşitsizliği her  $x \in X$  için

$$d(Tx, Ty) \leq \theta(x) - \theta(Tx)$$

sağlanacak biçimde alttan yarı sürekli bir  $\theta: X \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $T$ ' nin bir sabit noktası vardır (Taş, 2017).

## 2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, metrik uzaylarda bazı dönüşümler için ortak sabit nokta teoremleri verilmiştir. Son zamanlarda ön plana çıkan uygulama alanlarından olan dinamik programlama ile ilgili kullanımı gösterilmiş ve ayrıntılı örneklerle verilen teoremler daha kolay anlaşılır hale getirilmiştir. Daha erken çalışmalarda tek bir dönüşüm için yapılan bu uygulama bu kısımda iki dönüşüm için yapılarak daha geniş bir bakış açısı ile konunun anlatılması amaçlanmıştır. Bu nedenle öncelikle bazı tanımlar ve hatırlatmalar yapıldıktan sonra asıl teoremlere geçilmiştir.

### 2.1. Bazı Dönüşümler ve Sabit Noktaları

Suzuki (2009), bir  $T$  dönüşümünün sabit bir noktasının varlığını sağlayan teoremleri aşağıdaki gibi dört türe ayırmıştır.

#### 2.1.1. Leader tipi

Leader 1983 yılında,  $T$ 'nin tek bir sabit noktası vardır ve  $\{T^n x\}$  tüm  $x \in X$  için sabit noktaya yakınsar. Böyle bir dönüşüme Picard operatörü PO denir, tanımını vermiştir.

#### 2.1.2. Adsız tür

$T$ 'nin tek bir sabit noktası vardır ve  $\{T^n x\}$ 'in mutlaka sabit noktaya yakınsaması gerekmez.

#### 2.1.3. Subrahmanyam tipi

Subrahmanyam 1974 yılında,  $T$  birden fazla sabit noktaya sahip olabilir ve  $\{T^n x\}$  tüm  $x \in X$  için sabit bir noktaya yakınsar, koşulunu göstermiştir. Böyle bir dönüşüm zayıf Picard operatörü WPO olarak adlandırılır (Rus, 2003). Herhangi bir PO'nun bir WPO olduğu açıktır ancak bunun tersi genel olarak doğru değildir (Berinde, 2010).

#### 2.1.4. Caristi tipi

Caristi ve Kirk 1975 yılında,  $T$ 'nin birden fazla sabit noktası olabilir ve  $\{T^n x\}$ 'in mutlaka sabit bir noktaya yakınsaması gerekmez, durumunu açıklamıştır.

**Tanım 5.**  $(E, \leq)$  kısmi sıralı bir küme ve  $F, E$ 'nin bir alt kümesi olsun. Eğer  $F$ 'nin her iki elemanı karşılaştırılabilirse,  $F$ 'nin iyi sıralıdır (Chandok ve Karapinar, 2013.)

**Tanım 6.**  $A, S: X \rightarrow X$  iki dönüşüm olsun. Bir  $u \in X$  noktasına

- i)  $Au = u$  ise  $A$ 'nın sabit bir noktası vardır.
- ii)  $Au = Su$  ise  $A$  ve  $S$ 'nin çakışma noktası denir.
- iii)  $Au = Su = u$  ise  $A$  ve  $S$ 'nin ortak sabit noktası denir.
- iv)  $A$  ve  $S$ 'nin çakışma noktaları takas edilebiliyorsa zayıf uyumlulardır.  $A$  ve  $S$ 'nin çakışma noktaları kümesini  $C(A, S)$  ile gösterilir (Aouine ve Aliouche, 2020).

**Önerme 1.**  $A, S: X \rightarrow X$  iki dönüşüm olsun.  $A$  ve  $S$ 'nin tekil bir çakışma noktası varsa  $z = Au = Su$  ve  $A$  ile  $S$  zayıf uyumluysa  $z$ ,  $A$  ve  $S$ 'nin tek ortak sabit noktasıdır (Aouine ve Aliouche, 2020).

**Tanım 7.**  $X$  bir Banach uzayı olsun.  $Y, X$  ve  $A$ 'nın bir alt kümesi olsun.  $S: Y \rightarrow Y$  öyle ki  $A(Y) \subset S(Y)$  olsun.  $x_0 \in Y$  için aşağıdaki yinelemeli şemayı göz önünde bulundurulursa  $Sx_{n+1} = Ax_n, n \in \mathbb{N}$  olur (Aouine ve Aliouche, 2020).

$Y = X$  için bu şemaya Jungck yinelemeli şeması denir. Jungck tarafından 1976 yılında tanıtılmıştır ve  $S = I_X$  olduğunda Picard yinelemeli şemasına indirgenir; burada  $I_X, X$ 'teki birim dönüşümdür.

$(X, d)$  bir metrik uzay olsun ve  $A, S: X \rightarrow X, A(X) \subset S(X)$  olacak şekilde iki dönüşüm olsun. Rus (2003), Rus (2006) ve Chandok vd. (2019) aşağıdaki tanımları vermiştir.

**Tanım 8.** Aşağıdaki durumlarda  $A$  ve  $S$ 'ye Picard-Jungck operatörleri (kısaca PJO) denir;

- i)  $A$  ve  $S$ 'nin tekil bir ortak sabit noktası  $z$  varsa
- ii)  $\{Sx_n\}$  dizisi her  $x \in X$  için  $z$ 'ye yakınsar.

Eğer  $S = I_X$  ise, burada  $I_X, X$ 'teki birim dönüşümdür. PO tanımı elde edilir.

**Tanım 9.** Aşağıdaki durumlarda  $A$  ve  $S$ 'nin zayıf Picard-Jungck operatörleri (kısaca WPJO ) olur:

- i)  $A$  ve  $S$ 'nin en az bir ortak sabit noktası vardır.
- ii)  $\{Sx_n\}$  dizisi herhangi bir  $x \in X$  için ortak bir sabit noktaya yakınsar.

Eğer  $S = I_X$  ise (burada  $I_X$ ,  $X$ 'teki birim dönüşümdür.) WPO tanımı elde edilir. Ek olarak, Chandok ve Karapınar'ın (2013) çalışmasında verilen Teorem 2.1'deki  $T$  ve  $f$  operatörleri zayıf uyumluysa  $T$  ve  $f$ , WPJO'dur.

**Tanım 10.** Aşağıdaki durumlarda  $A$  ve  $S$ 'ye Quasi Picard-Jungck operatörleri (kısaca QPJO) denir:

- i)  $A$  ve  $S$ 'nin tekil bir  $z$  çakışma noktası veya bir çakışma noktası vardır.
- ii)  $\{Sx_n\}$  dizisi her  $x \in X$  için  $z$ 'ye yakınsar.

Eğer  $S = I_X$  ise, burada  $I_X$ ,  $X$ 'teki birim dönüşümdür, PO tanımı elde edilir (Aouine ve Aliouche, 2020).

#### **Açıklama 1.**

- i) Eğer  $A$  ve  $S$ ,  $z$ 'de değişiyorsa, Önerme 2.1'e göre,  $A$  ve  $S$ 'nin tekil bir ortak sabit noktası  $z$  vardır ve dolayısıyla  $A$  ve  $S$  dönüşümleri PJO olur.
- ii) Abbas ve Khan 2009 yılında, Berinde (2010), Jungck 1976 yılında ve Sessa'nın (1982) verdiği teoremlerinde  $A$  ve  $S$ 'nin zayıf uyumluluğu koşulu kaldırılırsa, o zaman  $A$  ve  $S$ , QPJO olur.

**Tanım 11.** Aşağıdaki durumlarda  $A$  ve  $S$ 'nin yarı zayıf Picard-Jungck operatörleri (kısaca QWPJO) olur.

- i)  $A$  ve  $S$  en az bir çakışma noktasına sahiptir.
- ii)  $\{Sx_n\}$  dizisi herhangi bir  $x \in X$  için bir çakışma noktasına yakınsar.

Eğer  $S = I_X$  ise, burada  $I_X$   $X$ 'teki birim dönüşümdür, WPO tanımını elde edilir (Aouine ve Aliouche, 2020).

**Teorem 2.**  $(X, d)$  tam bir metrik uzay olsun ve  $T, X$ 'ten kendisine aşağıdaki koşulu sağlayan bir dönüşüm olsun;

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{d(y, Tx) + d(x, Ty)}{d(x, Tx) + d(y, Ty) + 1} d(x, y)$$

olur. Tüm  $x, y \in X$  için, o halde

- i)  $T$ 'nin en az bir  $z \in X$  sabit noktası vardır.
- ii)  $\{T^n x\}$ , tüm  $x \in X$  için sabit bir noktaya yakınsar.
- iii) Eğer  $z$  ve  $w$ ,  $T$  dolayısıyla  $d(z, w) \geq \frac{1}{2}$  olur (Aouine ve Aliouche, 2020).

**Teorem 3.**  $(X, d)$  tam bir metrik uzay olsun ve tüm  $x, y \in X$  için

$$d(Sx, Ty) \leq N(x, y)m(x, y)$$

olsun. Buradan

$$N(x, y) = \frac{\max\{d(x, y), d(x, Sx) + d(y, Ty), d(x, Ty) + d(y, Sx)\}}{d(x, Sx) + d(y, Ty) + 1}$$

ve

$$m(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Sx)}{2}\right\}$$

için aşağıdaki sonuçlar elde edilir (Aouine ve Aliouche, 2020).

O halde

- i)  $S$  ve  $T$ 'nin en az bir ortak sabit noktası  $p \in X$  vardır.

- ii)  $n$  çift için,  $\{ST^{\frac{n}{2}}x\}$  ve  $\{T(ST)^{\frac{n}{2}}x\}$ , her  $x \in X$  için ortak bir sabit noktaya yakınsar.
- iii) Eğer  $p$  ve  $q$ ,  $S$  ve  $T$ 'nin farklı ortak sabit noktaları ise  $d(p, q) \geq \frac{1}{2}$  olduğu elde edilir.

Bir sonraki önerme, ana teoremin ispatından çok önemli bir rol oynar.

**Önerme 2.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $\{x_n\}$   $X$ 'te öyle bir dizi olsun, her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \beta_n d(x_{n-1}, x_n) \quad (1)$$

ve buradan,

$$\beta = \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + 1}$$

olduğundan  $\{x_n\}$  bir Cauchy dizisidir (Aouine ve Aliouche, 2020).

**Teorem 4.**  $A$  ve  $S$

$$A(X) \subset S(X) \quad (2)$$

$$d(Ax, Ay) \leq N(x, y)M(x, y) \quad (3)$$

özelliklerini sağlayan tam bir metrik uzayın  $(X, d)$  kendi içine iki dönüşümü olsun. Tüm  $x, y \in X$  için burada,

$$N(x, y) = \frac{\max\{d(Sx, Sy), d(Sx, Ax) + d(Sy, Ay), d(Sx, Ay) + d(Sy, Ax)\}}{d(Sx, Ax) + d(Sy, Ay) + 1}, \quad (4)$$

$$M(x, y) = \max\left\{d(Sx, Sy), d(Sx, Ax), d(Sy, Ay), \frac{d(Sx, Ay) + d(Sy, Ax)}{2}\right\} \quad (5)$$

için  $S(X)$ 'in  $X$ 'in kapalı bir alt uzayı olsun. Yani;

i)  $A$  ve  $S$ 'nin en az bir  $u \in X$  çakışma noktası vardır ve Jungck dizisi  $\{y_n\} = \{Sx_n\}$  her  $x \in X$  için  $z = Au$ 'ya yakınsar. Bu durumda  $A$  ve  $S$  QWPJO'dur.

ii)  $ASu = SAu$  olacak şekilde  $u \in C(A, S)$  varsa,  $z = Au$ ,  $A$  ve  $S$ 'nin başka bir çakışma noktasıdır. Bu durumda  $A$  ve  $S$ , QWPJO'dur.

- iii) Eğer  $v$ ,  $A$  ve  $S$ 'nin ayrı bir çakışma noktası ise, dolayısıyla  $d(Au, Av) \geq \frac{1}{2}$  olur.
- iv) Eğer bazı  $u \in C(A, S)$  ve  $ASu = SAu$  için  $Au = A^2u$  ise, o zaman  $A$  ve  $S$  en az bir sabit noktaya sahiptirler.  $z = Au$  ve Jungck dizisi  $x \in X$  için  $\{y_n\} = \{Sx_n\}$  olacak biçimde herhangi bir durum için  $z$ 'ye yakınsar. Bu durumda  $A$  ve  $S$  WPJO' dur.
- v) Eğer  $z$  ve  $w$ ,  $A$  ve  $S$ 'nin ayrı ortak sabit noktalarıysa,  $d(z, w) \geq \frac{1}{2}$  olur (Aouine ve Aliouche, 2020).

**Sonuç 1.**  $A$ , tüm  $x, y \in X$  için

$$d(Ax, Ay) \leq N(x, y)M(x, y)$$

sağlayan tam bir metrik uzayın  $(X, d)$  kendi içine dönüşüm olsun; burada

$$N(x, y) = \frac{\max\{d(x, y), d(x, Ax) + d(y, Ay) + d(y, Ax)\}}{d(x, Ax) + d(y, Ay) + 1}$$

ve

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Ax), d(y, Ay), \frac{d(x, Ay) + d(y, Ax)}{2}\right\}$$

olarak verilsin. O halde;

- i)  $A$  bir WPO' dur.
- ii) Eğer  $z$  ve  $w$ ,  $A$ 'nın farklı sabit noktalarıysa,  $d(z, w) \geq \frac{1}{2}$  olur (Aouine ve Aliouche, 2020).

Yukarıda verilen sonucu araştıran bazı örnekler aşağıda verilmiştir (Aouine ve Aliouche, 2020). Bu örneklerin ardından verilen sonucun hangi alanlara uygulanabileceğini gösteren dinamik programlama ile ilgili kısa bir analiz yer almaktadır.

**Örnek 1.**  $X = \{0,1,2,3\}$  kümesi bilinen metrikle donatılsın.  $A, S: X \rightarrow X$  şu şekilde tanımlansın:

$$A(0) = 1, A(1) = 2, A(2) = 1, A(3) = 2,$$

$$S(0) = 1, S(1) = 3, S(2) = 3, S(3) = 2.$$

$A(X) = \{1,2\} \subset S(X) = \{1,2,3\}$  için  $C(A, S) = \{0,3\}$ .  $A^2(0) = 2 \neq 0$ ,  $A^2(3) = 1 \neq 3$  ve A ile S'nin çakışma noktalarında hareket etmediğini görmek kolaydır.

$x = y$  ve  $(x, y) \in \{(0,2), (0,3), (1,3)\}$  durumları açıktır.

1)  $(x, y) = (0,1)$  durumu için şu elde edilir:

$$d(A(0), A(1)) = d(1,2) = 1$$

$$< N(0,1)M(0,1) = 3.$$

Buradan

$$N(0,1) = \frac{\max\{d(S(0), S(1)), d(A(0), S(0)) + d(A(1), S(1)), d(A(0), S(1)) + d(S(0), A(1))\}}{d(A(0), S(0)) + d(A(1), S(1)) + 1}$$

$$= \frac{\max\{d(1,3), d(2,3), d(1,3) + d(1,2)\}}{d(2,3) + 1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$M(0,1) = 2.$$

2)  $(x, y) = (1,2)$  durumu için şu elde edilir:

$$d(A(1), A(2)) = d(2,1) = 1$$

$$< N(1,2)M(1,2) = \frac{3}{2}.$$

Buradan

$$N(1,2) = \frac{\max\{d(S(1), S(2)), d(A(1), S(1)) + d(A(2), S(2)), d(A(1), S(2)) + d(S(1), A(2))\}}{d(A(1), S(1)) + d(A(2), S(2)) + 1}$$

$$= \frac{\max\{d(3,3), d(2,3) + d(1,3), d(2,3) + d(3,1)\}}{d(2,3) + d(1,3) + 1}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$M(0,1) = 2.$$

3)  $(x, y) = (2, 3)$  durumu için şu elde edilir:

$$\begin{aligned}d(A(2), A(3)) &= d(1, 2) = 1 \\ &< N(2, 3)M(2, 3) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}N(2, 3) &= \frac{\max\{d(S(2), S(3)), d(A(2), S(2)) + d(A(3), S(3)), \\ &\quad d(A(2), S(3)) + d(S(2), A(3))\}}{d(A(2), S(2)) + d(A(3), S(3)) + 1} \\ &= \frac{\max\{d(3, 2), d(1, 3), d(1, 2) + d(3, 2)\}}{d(1, 3) + 1} \\ &= \frac{2}{3} \\ M(2, 3) &= 2.\end{aligned}$$

Dolayısıyla Sonuç 1'in tüm hipotezleri geçerlidir. Buna göre A ve S'nin iki çakışma noktası 0 ve 3'tür. Üstelik  $d(A(0), A(3)) = d(1, 2) > \frac{1}{2}$  bulunur.

**Örnek 2.**  $X = \{0, 1, 2, 3\}$  kümesi bilinen metrikle donatılsın. A ,  $S: X \rightarrow X$  şu şekilde tanımlansın:

$$A(0) = 1, A(1) = 2, A(2) = 1, A(3) = 0,$$

$$S(0) = 1, S(1) = 2, S(2) = 3, S(3) = 0.$$

$$A(X) = \{0, 1, 2\} \subset S(X) = \{0, 1, 2, 3\} \text{ için } C(A, S) = \{0, 1, 2, 3\}. A^2(0) = 2 \neq 0,$$

$$A^2(3) = 1 \neq 3 \text{ ve A ile S'nin 0 ve 3 çakışma noktalarında gidip geldikleri açıktır.}$$

$$x = y \text{ ve } (x, y) \in \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 3)\} \text{ durumları açıktır.}$$

1)  $(x, y) = (1, 2)$  durumu için şu elde edilir:

$$\begin{aligned}d(A(1), A(2)) &= d(2, 1) = 1 \\ &< N(1, 2)M(1, 2) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} N(1,2) &= \frac{\max\{d(S(1),S(2)),d(A(1),S(1))+d(A(2),S(2)),\}}{d(A(1),S(2))+d(S(1),A(2))} \\ &= \frac{\max\{d(2,3),d(1,3)d(2,3)+d(2,1)\}}{d(1,3)+1} \\ &= \frac{2}{3} \\ M(1,2) &= 2. \end{aligned}$$

2)  $(x, y) = (2,3)$  durumu için

$$\begin{aligned} d(A(2), A(3)) &= d(1,0) = 1 \\ &< N(2,3)M(2,3) = 4. \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} N(2,3) &= \frac{\max\{d(S(2),S(3)),d(A(2),S(2))+d(A(3),S(3)),\}}{d(A(2),S(3))+d(S(2),A(3))} \\ &= \frac{\max\{d(3,0),d(1,3),d(1,0)+d(3,0)\}}{d(1,3)+1} \\ &= \frac{4}{3} \\ M(2,3) &= 3. \end{aligned}$$

Dolayısıyla yine tüm koşulları geçerlidir. Sonuç olarak A ve S'nin 0,1 ve 3 olmak üzere üç çakışma noktası vardır. Üstelik

$$\begin{aligned} d(A(0), A(1)) &= d(1,2) > \frac{1}{2}, d(A(0), A(3)) = d(1,0) > \frac{1}{2} \\ d(A(1), A(3)) &= d(2,0) > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

olur.

**Örnek 3.**  $X = \{0,1,2,3\}$  kümesi bilinen metrikle donatılsın. A, S:  $X \rightarrow X$  şu şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0, A(1) = 1, A(2) = 1, A(3) = 2, \\ S(0) &= 0, S(1) = 1, S(2) = 3, S(3) = 2. \end{aligned}$$

$A(X) = \{0,1,2\} \subset S(X) = \{0,1,2,3\}$  elimizde.  $C(A, S) = \{0,1,3\}$ .  $A^2(0) = A(0) = 0$ ,  $A^2(1) = A(1) = 1$ ,  $A^2(3) = A(2) = 1 \neq 3$ , olduğu açıktır, A ve S tesadüfen hareket ederler 0 ve 1 noktaları ve çakışma noktaları 3'e gidip gelmiyorlar.

$x = y$  ve  $(x, y) \in \{(0,1), (0,3), (1,2), (1,3)\}$  durumları açıktır.

1)  $(x, y) = (0,2)$  durumu için şu elde edilir:

$$\begin{aligned} d(A(0), A(2)) &= d(0,1) = 1 \\ &< N(0,2)M(0,2) = 4. \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} N(0,2) &= \frac{\max\left\{d(S(0),S(2)), d(A(0),S(0))+d(A(2),S(2)), \frac{d(A(0),S(2))+d(S(0),A(2))}{d(A(0),S(0))+d(A(2),S(2))}\right\}}{d(A(0),S(0))+d(A(2),S(2))+1} \\ &= \frac{\max\{d(0,3), d(1,3), d(0,3)+d(0,1)\}}{d(1,3)+1} \\ &= \frac{4}{3} \\ M(0,2) &= 3. \end{aligned}$$

2)  $(x, y) = (2,3)$  durumu için şu elde edilir:

$$\begin{aligned} d(A(2), A(3)) &= d(1,2) = 1 \\ &< N(2,3)M(2,3) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} N(2,3) &= \frac{\max\left\{d(S(2),S(3)), d(A(2),S(2))+d(A(3),S(3)), \frac{d(A(2),S(3))+d(S(2),A(3))}{d(A(2),S(2))+d(A(3),S(3))}\right\}}{d(A(2),S(2))+d(A(3),S(3))+1} \\ &= \frac{\max\{d(3,2), d(1,3), d(1,2)+d(3,2)\}}{d(1,3)+1} \\ &= \frac{2}{3} \\ M(0,1) &= 2. \end{aligned}$$

Dolayısıyla tüm varsayımları geçerlidir. Dolayısıyla A ve S'nin iki ortak noktası 0 ve 1'dir ve bir çakışma noktası 3'tür. Ayrıca

$$d(A(0), A(1)) = d(0,1) > \frac{1}{2}, d(A(0), A(3)) = d(0,2) > \frac{1}{2},$$

$$d(A(1), A(3)) = d(1,2) > \frac{1}{2}.$$

Verilen sonuçta  $S = I_X$  ise ( burada  $I_X, X'$  te birim dönüşümdür), aşağıdaki sonucu elde edilir:

**Sonuç 2.** A, her  $x, y \in X$  için

$$d(Ax, Ay) \leq N(x, y)M(x, y)$$

sağlayan tam  $(X, d)$  metrik uzayında bir dönüşüm olsun.

$$N(x, y) = \frac{\max\{d(x, y), d(x, Ax) + d(y, Ay) + d(y, Ax)\}}{d(x, Ax) + d(y, Ay) + 1}$$

ve

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Ax), d(y, Ay), \frac{d(x, Ay) + d(y, Ax)}{2}\right\}$$

olarak verilsin. O halde

i) A bir WPO' dur.

ii) Eğer  $z$  ve  $w$ , A'nın farklı sabit noktalarıysa,  $d(z, w) \geq \frac{1}{2}$  olur.

**Örnek 4.**  $X = \{0,1,2,3\}$  kümesi bilinen metrikle donatılsın. A,  $S: X \rightarrow X$  şu şekilde tanımlansın:

$$A(0) = 0, A(1) = 1, A(2) = 1, A(3) = 0$$

$x = y$  ve  $(x, y) \in \{(0,1), (0,3), (1,2)\}$  durumları açıktır.

1)  $(x, y) = (0,2)$  durumu için şu elde edilir:

$$d(A(0), A(2)) = d(0,1) = 1$$

$$< N(0,2)M(0,2) = 3.$$

Burada

$$N(0,2) = \frac{\max\left\{\begin{array}{l} d(0,2), d(0,A(0))+d(2,A(2)), \\ d(0,A(2))+d(2,A(0)) \end{array}\right\}}{d(0,A(0))+d(2,A(2))+1}$$

$$= \frac{\max\{d(0,2), d(2,1), d(0,1)+d(2,0)\}}{d(2,1)+1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$M(0,2) = 2.$$

2)  $(x, y) = (1,3)$  durumu için

$$d(A(1), A(3)) = d(1,0) = 1$$

$$< N(1,3)M(1,3) = \frac{9}{4}.$$

Burada

$$N(1,3) = \frac{\max\left\{\begin{array}{l} d(1,3), d(1,A(1))+d(3,A(3)), \\ d(1,A(3))+d(3,A(1)) \end{array}\right\}}{d(1,A(1))+d(3,A(3))+1}$$

$$= \frac{\max\{d(1,3), d(3,0), d(1,0)+d(3,1)\}}{d(3,0)+1}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$M(1,3) = 3.$$

3)  $(x, y) = (2,3)$  durumu için

$$d(A(2), A(3)) = d(1,0) = 1$$

$$< N(2,3)M(2,3) = \frac{12}{5}.$$

Burada

$$\begin{aligned} N(2,3) &= \frac{\max\left\{\frac{d(2,3), d(2,A(2))+d(3,A(3))}{d(2,A(3))+d(3,A(2))}\right\}}{d(2,A(2))+d(3,A(3))+1} \\ &= \frac{\max\{d(2,3), d(2,1)+d(3,0), d(2,0)+d(3,1)\}}{d(2,1)+d(3,0)+1} \\ &= \frac{4}{5} \\ M(2,3) &= 3. \end{aligned}$$

Dolayısıyla A, Sonuç 2'nin tüm varsayımlarını karşılamaktadır ve A, 0 ve 1 olmak üzere iki ayrı sabit noktaya sahiptir. Ayrıca  $d(0,1) = 1 > \frac{1}{2}$ .  $d(A(2), A(3)) = 1$  ve

$$\frac{d(2,A(3))+d(3,A(2))}{d(2,A(2))+d(3,A(3))+1} d(2,3) = \frac{4}{5},$$

olduğunda  $1 > \frac{4}{5}$  elde edilir. Bu nedenle Teorem 2 uygulanamaz.

**Açıklama 2.** Sonuç 1'in, Örnek 3'teki A ve S dönüşümleri için uygulanamayacağından, ancak Teorem 4 uygulanabilir çünkü  $(x, y) = (2,3)$  durumu için

$$\begin{aligned} d(A(2), A(3)) &= d(1,2) = 1 \\ &> N(2,3)M(2,3) = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} N(2,3) &= \frac{\max\left\{\frac{d(2,3), d(2,A(2))+d(3,A(3))}{d(2,A(3))+d(3,A(2))}\right\}}{d(2,A(2))+d(3,A(3))+1} \\ &= \frac{\max\{d(2,3), d(2,1)+d(3,2), d(2,2)+d(3,1)\}}{d(2,1)+d(3,2)+1} \\ &= \frac{2}{3} \\ M(2,3) &= 1. \end{aligned}$$

$$d(S(2), S(3)) = d(3,2) = 1$$

$$> N(2,3)M(2,3) = \frac{2}{3},$$

Burada

$$N(2,3) = \frac{\max\{d(2,3), d(2, S(2)) + d(3, S(3)), d(2, S(3)) + d(3, S(2))\}}{d(2, S(2)) + d(3, S(3)) + 1}$$

$$= \frac{\max\{d(2,3), d(2,3) + d(3,2), d(2,2) + d(3,3)\}}{d(2,3) + d(3,2) + 1}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$M(2,3) = 1.$$

Yukarıda verilen durumlar, Teorem 4' ün gerçek bir genellemesi olduğunu gösterir.

## 2.2. Dinamik Programlama

$X$  ve  $Y$  Banach uzayları,  $S \subset X$  durum uzayı,  $D \subset Y$  karar uzayı ve  $I_X$ ,  $X$  üzerindeki birim dönüşüm olsun.  $B(S)$ ,  $S$  ve

$$d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)| \quad (6)$$

üzerindeki tüm sınırlı gerçek değerli değerli fonksiyonların kümesini belirtir.  $(B(S), d)$ 'in tam bir metrik uzay olduğu açıktır.

Bellman ve Lee tarafından 1978 yılında önerildiği gibi, dinamik programlamadaki fonksiyonel denklemin temel formu

$$f(x) = \text{opt}_{y \in D} H(x, y, f(T(x, y))), x \in S \quad (7)$$

olur. Burada  $x$  ve  $y$  sırasıyla durum ve karar vektörlerini belirtir.  $T$  sürecin dönüşümünü,  $f(x)$  başlangıç durumu  $x$  olan optimal dönüş fonksiyonunu ve  $\text{opt sup}$  veya  $\text{inf}$ 'yi temsil eder.

Bu bölümde Teorem 4'ü uygulanarak dinamik programlamada ortaya çıkan iki fonksiyonel denklemin aşağıdaki sisteminin ortak çözümlerinin varlığını tespit edilir.

$$f_i(x) = \text{opt}_{y \in D} \{u(x, y) + H_i(x, y, f_i(T(x, y)))\}, x \in S, i = 1, 2, \quad (8)$$

Burada  $u: S \times D \rightarrow S, T: S \times D \rightarrow S$  ve  $H_i: S \times D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$  olur.

**Teorem 5.** Aşağıdaki koşulları verilsin:

(c1)  $u$  ve  $H_i, i = 1, 2$  için sınırlıdır.

(c2) Tüm  $(x, y) \in S \times D, g, h \in B(S)$  ve  $t \in S$

$$|H_1(x, y, g(t)) - H_1(x, y, h(t))| \leq N(g(t), h(t))M(g(t), h(t)), \quad (9)$$

Burada

$$N(g(t), h(t)) = \frac{\max \left\{ |A_2g(t) - A_2h(t)|, |A_2g(t) - A_1g(t)| + |A_2h(t) - A_1h(t)|, \right.}{|A_2g(t) - A_1h(t)| + |A_2h(t) - A_1g(t)|} \left. \right\}}{d(A_2g, A_1g) + d(A_2h, A_1h) + 1}$$

$$M(g(t), h(t)) = \max \left\{ \frac{|A_2g(t) - A_2h(t)|, |A_2g(t) - A_1g(t)|, |A_2h(t) - A_1h(t)|,}{2} \right\}$$

ve

$$A_i g_i(x) = \text{opt}_{y \in D} \{u(x, y) + H_i(x, y, g_i(T(x, y)))\}, x \in S, i = 1, 2$$

olur.

(c3)  $A_1(B(S)) \subset A_2(B(S))$ .

(c4) Bazı  $u \in C(A_1, A_2)$  için  $A_1u = A_1^2u$  ve  $A_1A_2u = A_2A_1u, u \in B(S)$ .

O halde dinamik programlamadaki fonksiyonel denklemi  $B(S)$ 'de en az bir ortak çözüme sahiptir (Aouine ve Aliouche, (2020)). Ek olarak, eğer  $z$  ve  $w$  fonksiyonel denklemin iki farklı çözümü ise bu nedenle  $d(z, w) \geq \frac{1}{2}$  olur.

### 3. YÖNTEM

Bu bölümde, bir önceki bölümde anlatılan sabit nokta teorisinde dönüşümlerin çeşitliliğine ek olarak uzayların nasıl genelleşebileceği, nasıl bir yöntem kullanıldığı, genelleşen bu uzaylarda dönüşümlerin ve sabit noktaların nasıl bulunabileceği ele alınmıştır. Bu amaçla  $G$ -metrik uzay,  $C^*$ -cebri değerli metrik uzay,  $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzay ve  $C^*$ -cebri değerli modüler  $G$ -metrik tanımlarına ve bu uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.

**Tanım 12.**  $X \neq \emptyset$  ve  $G: X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$(G_1) \quad e = f = g \quad \text{ise} \quad G(e, f, g) = 0$$

$$(G_2) \quad \text{Her } e, f \in X \quad e \neq f \quad \text{için} \quad G(e, e, f) > 0$$

$$(G_3) \quad \text{Her } e, f, g \in X \quad f \neq g \quad \text{için} \quad G(e, e, f) \leq G(e, f, g)$$

$$(G_4) \quad G(e, f, g) = G(e, g, f) = G(f, e, g) = G(f, g, e) = G(g, e, f) = G(g, f, e) \text{ (simetri özelliği)}$$

$$(G_5) \quad \text{Her } k, e, f, g \in X \quad \text{için} \quad G(e, f, g) \leq G(e, k, k) + G(k, f, g) \text{ (dikdörtgen eşitsizliği)}$$

$X$  üzerinde bir  $G$ -metrik ve çift  $(X, G)$   $G$ -metrik uzay olarak adlandırılır (Azadifar vd. 2013).

**Önerme 3.**  $A$  bir  $C^*$ -cebri ve  $a \in A^*$  olsun. Aşağıdakiler sağlanır (Özer vd., 2019):

$$1) \text{ Tek bir } b \in A^* \text{ öyle ki } b^2 = a$$

$$2) A^+ = \{a^*a \mid a \in A\} \quad *: A \rightarrow A \text{ konjüğe lineer dönüşümdür.}$$

$$3) a, b \in A \quad \text{ve} \quad 0 \leq a \leq b \quad \text{ise} \quad \|a\| \leq \|b\|$$

$$4) a \in A^+ \text{ ve } \|a\| \leq \frac{1}{2} \text{ ise } (1 - a) \text{ tersine çevrilebilirdir ve } \left\| \frac{a}{1-a} \right\| < 1.$$

**Tanım 13.**  $X \neq \emptyset$   $d: X \times X \rightarrow A$  dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$1) \forall a, b \in X \quad \text{için} \quad 0 \leq d(a, b) \text{ ve } a = b \Leftrightarrow d(a, b) = 0$$

$$2) \forall a, b \in X \quad \text{için} \quad d(a, b) = d(b, a)$$

$$3) \forall a, b, c \in X \quad \text{için} \quad d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

özelliklerini sağlayan  $d$  dönüşümüne  $X$  üzerinde  $C^*$ -cebir değerli metrik denir.  $(X, A, d)$  kümesine  $C^*$ -cebri değerli metrik uzayı denir (Özer vd., 2019).

**Tanım 14.**  $X \neq \emptyset$  ve  $G_A: X \times X \times X \rightarrow A$  aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$(G_1) \quad p = q = r \text{ ise } G_A(p, q, r) = 0$$

$$(G_2) \quad \forall p, q \in X \text{ için } p \neq q \text{ ise } 0 < G_A(p, p, q)$$

$$(G_3) \quad \forall p, q, r \in X \text{ için } p \neq r \text{ ise } G_A(p, p, q) \leq G_A(p, q, r)$$

$$(G_4) \quad G_A(p, q, r) = G_A(p, r, q) = G_A(q, p, r). \dots \text{ (simetri özelliği)}$$

$$(G_5) \quad \forall k, p, q, r \in X \text{ için } G_A(p, q, r) \leq G_A(p, k, k) + G_A(k, q, r)$$

Bu özellikleri sağlayan  $G_A$   $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik  $(X, A, G_A)$  kümesine  $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik denir (Özer vd., 2019).

**Örnek 5.**  $X = \mathbb{R}$  ve  $G: X \times X \times X \rightarrow A^+$ ,  $\forall r, s, t \in X$  ve  $I \in A$  birim eleman olmak üzere

$$G(r, s, t) = \|r - s\|I + \|s - t\|I + \|t - r\|I,$$

$G$ 'nin tanımı verilsin. O halde  $(X, A, G)$   $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzaydır (Özer vd., 2019).

**Tanım 15.**  $(X, A, G)$   $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzay ve  $\{a_n\}$  dizisi verilsin.  $\forall a \in X$  için

$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}$  öyle ki  $G(a, a_m, a_n) < e$  olacak biçimde  $e > 0$  vardır.

$\lim_{n \rightarrow \infty} G(a, a_n, a_m) = 0$  olması için gerek ve yeter şart  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  olmasıdır (Özer vd., 2019).

**Tanım 16.**  $(X, A, G)$   $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzay ve  $\{C_n\} \subset X$  verilsin.  $\forall \varepsilon > 0$  için  $n^* \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki  $G(c_l, c_m, c_n) < \varepsilon$  olacak biçimde  $\forall l, m, n \geq n^*$  varsa  $\{C_n\}$  dizisine  $A$ 'ya göre Cauchy dizisi denir (Özer vd., 2019).

$\lim_{l, m, n \rightarrow \infty} G(c_l, c_m, c_n) \rightarrow 0$  iken  $\lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \|G(c_l, c_m, c_n)\| \rightarrow 0$  olmasıdır.

**Tanım 17.** Her dizi  $A$ 'ya göre yakınsak ise  $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzay tamdır (Özer vd., 2019).

**Tanım 18.**  $(X, A, G)$   $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzaydır.  $\forall c \in X$  için aşağıdakiler denktir (Özer vd., 2019):

- 1)  $c_n$  Cauchy dizisi  $c$ 'ye yakınsaktır.
- 2)  $n \rightarrow \infty$  iken  $\|G(c_n, c_n, c)\| \rightarrow 0$
- 3)  $m \rightarrow \infty$  iken  $\|G(c_m, c, c)\| \rightarrow 0$
- 4)  $m, n \rightarrow \infty$  iken  $\|G(c_m, c_n, c)\| \rightarrow 0$

**Önerme 4.**  $(X, A, G)$   $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzaydır.  $G(x, y, z)$  ifadesi tüm değerler için süreklidir (Özer vd., 2019).

**Teorem 6.**  $(X, A, G)$  tam bir  $C^*$ -cebri değerli  $G$ -metrik uzay olsun.  $T: X \rightarrow X$ ,  $X$  üzerinde bir büzülme dönüşümü olsun öyle ki

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq a^* G(x, y, z) a$$

$\forall x, y, z \in X$  için burada  $a \in A$  ve  $\|a\| < 1$ . Yani  $T$  büzülme dönüşümünün tek sabit noktası vardır (Özer vd., 2019).

**Tanım 19.**  $X$  boştan farklı bir küme olmak üzere bir  $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ ' a fonksiyonu verilsin. Eğer  $w$ , her  $x, y \in X$  için;

- (i)  $x = y \Leftrightarrow$  her  $t > 0$  için  $w_t(x, y) = 0$ ,
- (ii) Her  $t > 0$  için  $w_t(x, y) = w_t(y, x)$ ,
- (iii) Her  $t, s > 0$  için  $w_{t+s}(x, y) \leq w_t(x, z) + w_s(z, y)$

Özelliklerini sağlanıyorsa  $w$ ' ye  $X$  üzerinde bir modüler metrik (basitçe modüler) denir (Chistyakov 2006; Chistyakov, 2010).

**Tanım 20.**  $X$  boş olmayan bir küme olsun ve  $\omega^G: (0, \infty) \times X \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$  bir dönüşüm olsun:

- (1)  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\lambda > 0$   $x = y = z$  ise  $\omega_\lambda^G(x, y, z) = 0$

- (2)  $\forall x, y \in X$  ve  $\lambda > 0$   $x \neq y$  için  $\omega_\lambda^G(x, x, y) > 0$   
(3)  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\lambda > 0$   $z \neq y$  için  $\omega_\lambda^G(x, x, y) \leq \omega_\lambda^G(x, y, z)$   
(4)  $\forall \lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, z) = \omega_\lambda^G(x, z, y) = \omega_\lambda^G(y, z, x) = \dots$  ( üç değişkenlerde simetri)  
(5)  $\forall x, y, z, a \in X$  ve  $\lambda, \mu > 0$  için  $\omega_{\lambda+\mu}^G(x, y, z) \leq \omega_\lambda^G(x, a, a) + \omega_\mu^G(a, y, z)$ , bu şartları sağladığında fonksiyon  $X$  üzerinde modüler  $G$ -metrik olarak adlandırılır (Okeke vd., 2021).

**Önerme 5.**  $(X, \omega^G)$  herhangi  $x, y, z, a \in X$  için modüler bir  $G$ -metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir (Okeke vd., 2021):

- (1)  $\forall \lambda > 0$  ,  $x = y = z$  ise  $\omega_\lambda^G(x, y, z) = 0$ .  
(2)  $\forall \lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \frac{\omega_\lambda^G(x, x, y)}{2} + \frac{\omega_\lambda^G(x, x, z)}{2}$ .  
(3)  $\forall \lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, y) \leq 2\frac{\omega_\lambda^G(x, x, y)}{2}$ .  
(4)  $\forall \lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \frac{\omega_\lambda^G(x, a, z)}{2} + \frac{\omega_\lambda^G(a, y, z)}{2}$ .  
(5)  $\forall \lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \frac{2}{3}(\frac{\omega_\lambda^G(x, y, a)}{2} + \frac{\omega_\lambda^G(x, a, z)}{2} + \frac{\omega_\lambda^G(a, y, z)}{2})$ .  
(6)  $\forall \lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \frac{\omega_\lambda^G(x, a, a)}{2} + \frac{\omega_\lambda^G(y, a, a)}{4} + \frac{\omega_\lambda^G(z, a, a)}{4}$ .

**Önerme 6.**  $(X, \omega^G)$  modüler bir  $G$ -metrik uzay ve  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_{\omega^G}$  bir dizi olsun. O zaman aşağıdakiler eşdeğerdir (Okeke vd., 2021):

- (1)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x$ 'e  $\omega^G$ -yakınsaktır.  
(2)  $\forall n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty$  iken  $\omega_\lambda^G(x_n, x, x) \rightarrow 0$ .  
(3)  $\forall \lambda > 0$  ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty$  iken  $\omega_\lambda^G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$ .  
(4)  $\forall \lambda > 0$  ,  $\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \rightarrow \infty$  iken  $\omega_\lambda^G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$ .

**Teorem 7.**  $\omega^G, X$  üzerinde bir modüler  $G$ -metrik uzay,  $X_{\omega^G}$  bir tam modüler  $G$ -metrik uzay,

$\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  alt yarı süreklı fonksiyon ve  $T: X_{\omega^G} \rightarrow X_{\omega^G}$  dönüşümü verilsin aşağıdaki eşitsizlik  $\lambda > 0$  ve  $\forall x \in X_{\omega^G}$  için sağlanır (Okeke vd., 2021):

$$\kappa(Tx) + \omega_\lambda^G(x, Tx, Tx) \leq \kappa(x).$$

**Tanım 21.**  $X$  boş olmayan bir küme olsun,  $\forall x, y, z, a \in X$  ve  $\omega^G: (0, \infty) \times X \times X \times X \rightarrow A_+$  bir dönüşüm olsun:

- (1)  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\lambda > 0$   $x = y = z$  ise  $\omega_\lambda^G(x, y, z) = 0$
- (2)  $\forall x, y \in X$  ve  $\lambda > 0$   $x \neq y$  için  $\omega_\lambda^G(x, x, y) > 0$
- (3)  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\lambda > 0$   $z \neq y$  için  $\omega_\lambda^G(x, x, y) \leq \omega_\lambda^G(x, y, z)$
- (4)  $\forall \lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, z) = \omega_\lambda^G(x, z, y) = \omega_\lambda^G(y, z, x) = \dots$  ( üç değişkenlerde simetri)
- (5)  $\forall x, y, z, a \in X$  ve  $\lambda, \mu > 0$  için  $\omega_{\lambda+\mu}^G(x, y, z) \leq \omega_\lambda^G(x, a, a) + \omega_\mu^G(a, y, z)$ , bu şartları sağladığında fonksiyon  $(X, A, \omega^G)$  üzerinde  $C^*$ -cebri değerli modüler  $G$ -metrik olarak adlandırılır (Das vd., 2021).

**Teorem 8.**  $(X, A, \omega^G)$   $\omega^G$ -tam  $C^*$ -cebri değerli modüler  $G$ -metrik ,  $\forall a, b \in X, q \in A$  için

$0 < \|q\| < 1, F_* \in C_*, \psi \in \Psi, \varphi \in \Phi$  tam monoton ve  $T_1, T_2$  dönüşümleri  $X$  üzerinde  $\|\omega_\lambda^G(T_1a, T_2T_1a, T_1b)\| < \infty$  için;

$$\psi(\|\omega_\lambda^G(T_1a, T_2T_1a, T_1b)\|_{1_A}) \leq F_*(\psi(\|q\|^2 \|\omega_{2\lambda}^G(a, T_2a, b)\|_{1_A}), \varphi(\|q\|^2 \|\omega_{2\lambda}^G(a, T_2a, b)\|_{1_A})),$$

sağlanır.  $T_1, T_2$  dönüşümleri  $X$  üzerinde ortak sabit bir noktaya sahiptir (Das vd., 2021).

#### 4. BULGULAR

Doğrusal uzaylar üzerine modüler teoriler, Nakano (1950, 1951) tarafından iki monografisinde verilmiştir. Bu monografilerde, yarı düzenli doğrusal uzaylarda (vektör kafesleri) bir spektral teori geliştirmiş ve bu modüler uzaylarda hareket eden izdüşümler için integral bir gösterim oluşturmuştur. Nakano (1950), dışbükey fonksiyoneller olan gerçek doğrusal uzaylar üzerine bazı modülerler oluşturmuştur. Dışbükey olmayan modülerler ve bunlara karşılık gelen modüler doğrusal uzaylar, Musielak ve Orlicz (1983) tarafından oluşturulmuştur. Orlicz (1988) uzayları ve modüler doğrusal uzaylar, modern doğrusal olmayan fonksiyonel analizde klasik araçlar haline gelmiştir.

Chistyakov'un (2010a) dikkat çekici bir çalışması, metrik uzayların modüler metrik uzaylar veya zaman parametresi  $\lambda$  (diyelim) olan parametrelili metrik uzaylar adı verilen bir yönünü tanıttı ve amacı, keyfi bir küme üzerinde modüler kavramını tanımlamak ve modüler metrik uzaylar adı verilen modülerler tarafından üretilen metrik uzaylar teorisini geliştirmek ve buna dayanarak, metrik yarıgruplarda ve soyut dışbükey konilerde değerlere sahip gerçek bir değişkenin sınırlı genelleştirilmiş değişiminin (çok değerli) fonksiyonlarının yeni metrik uzaylarını tanımlamaktı.

Chistyakov (2010b), bir uygulama olarak, bu modüler metrik uzaylarda etki eden Lipschitz sürekli ve bazı diğer süperpozisyon (Nemytskii) operatör sınıflarının ayrıntılı bir tanımını sundu. Chistyakov, modülerler tarafından üretilen metrik uzaylar teorisini geliştirdi ve Nakano (1950), Musielak ve Orlicz (1983), Musielak tarafından verilen sonuçları modüler metrik uzaylara genişletti. Modüler uzaylar, integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue, Riesz ve Orlicz uzaylarının uzantılarıdır.

Modüler metrik uzaylar olarak adlandırılan modülerler tarafından üretilen metrik uzaylar teorisinin geliştirilmesi, Chistyakov'un kendisi de dahil olmak üzere, bu alanda sabit nokta sonuçlarını araştıran birçok araştırmacı matematikçinin ilgisini çekmiştir. Chistyakov (2013) ayrıca modüler uzaylardaki büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri de oluşturmuştur. Bu teoremler, metrik mesafelerden ziyade genelleştirilmiş ortalama hızlarla ilgilidir ve sabit noktaların ardışık yaklaşımları, metrik mesafelere kıyasla sabit noktalara daha zayıf bir şekilde yakınsar. Chistyakov'deki (2013) yakınsama ve modüler metrik uzaylardaki diğer sabit nokta sonuçları Mutlu vd., (2018) ve Rhoades'te (2003) bulunabilir.

Uygulanabilirlik göz önüne alındığında, bu sabit nokta sonuçları doğrusal olmayan integral denklemlerin sabit nokta çözümünü bulmakta kullanılır (bkz. Rhoades, 2003; Liu vd., 2011; Okeke & Francis, 2021), Chaipunya vd. (2012) ise modüler metrik uzaylardaki kısmi diferansiyel denklemlere uygulama ile ilgilenir. İlgilenen okuyucular, modüler fonksiyon uzaylarında daha ileri çalışmalar için belirtilen referanslara ve içerisinde yer alan referanslara bakabilirler (Okeke & Francis, 2018; Okeke & Francis, 2021; Okeke & Francis, 2019; Okeke & Francis, 2020a; Okeke & Francis, 2020b).

Azadifar vd. (2013), modüler  $G$ -metrik uzay kavramını ortaya koydu ve modüler  $G$ -metrik uzaylar üzerinde tanımlanan büzülme eşlemelerinin bazı sabit nokta teoremlerini elde etti. Bu makaledeki amacımız, Mutlu vd. (2018), sabit nokta teoremini modüler metrik uzayların düzenlenmesinden modüler  $G$ -metrik uzaylara genişletmektir. Sonuçlarımız, literatürde bilinen birçok sonucu genişletmekte ve genelleştirmektedir. Modüler metrik uzaylarda benzersiz olmayan sabit nokta teoremleriyle ilgili sonuçlar için okuyucular ayrıca Hussain (2019) ve içindeki referanslara da bakmalıdır.

Zhao (2020), üstel ikiliği uyguladı ve Tikhonov ve Banach sabit nokta teoremleri, yinelemeli fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir sınıfının sözde neredeyse periyodik çözümlerinin varlığını ve benzersizliğini incelemek için kullanıldı:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^k \sum_{l=1}^{\infty} C_{l,n}(t) (x^{[n]}(t))^l + G(t), \text{ burada } x^{[n]}(t) \text{ } x(t) \text{ nin } n.\text{nci iterasyonudur.}$$

Son zamanlarda, Combettes ve Glaudin (2021), her yinelemede yalnızca bir operatör bloğunu etkinleştirerek, genişlemeyen operatörlerden oluşan ortak bir sabit noktayı yinelemeli olarak oluşturmuştur. Ortak sabit noktaları paylaşmayan operatörleri içeren daha zorlu bileşik sabit nokta problemleri sınıfında, mevcut yöntemler her yinelemede tüm operatörlerin etkinleştirilmesini gerektirir ve yalnızca operatör bloklarını güncellerken yakınsamayı sürdürme sorunu açık kalmaktadır. Bu amaca ulaşan bir yöntem önermiş ve yöntemin asimptotik davranışını analiz etmişlerdir. Yoğunlaşan diziler teorisiyle bir bağlantı kullanılarak zayıf, güçlü ve doğrusal yakınsama sonuçları elde edilmiştir. Monoton katılımlardan ve tutarsız fizibilite problemlerinden, veri biliminde ortaya çıkan varyasyonel eşitsizliklere ve en aza indirme problemlerine kadar çeşitli doğrusal olmayan ve düzgün olmayan analiz problemlerine uygulamalar sunulmuştur.

#### 4.1. Bazı Tanımlar

Bu kısımda modüler  $G$ -metrik hakkında daha fazla tanım ve teoreme yer verilerek bu uzayın farklı bir yöne olan genelleştirilmiş uzayına yani modüle  $b$ -metrik uzaylara değinmek için gereken özellikler incelenmiş ve basit örneklere yer verilmiştir. Modüler  $b$ -metrik uzay yapısında değişen özellikler ve bunlar yardımıyla elde edilen sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

##### Hatırlatma 1.

- (a)  $(X, \omega^G)$  çiftine modüler  $G$ -metrik uzay, kısaca  $X_{\omega^G}$  modüler  $G$ -metrik uzay da denir. (5) koşulundan,  $\omega^G$  konveks ise;
- (b)  $\omega_{\lambda+\mu}^G(x, y, z) \leq \frac{\omega_{\lambda}^G(x, a, a)}{\lambda+\mu} + \frac{\omega_{\mu}^G(a, y, z)}{\lambda+\mu}$ ,
- (c) Eğer  $x = a$ , ise (5) koşulu ile  $\omega_{\lambda+\mu}^G(a, y, z) \leq \omega_{\mu}^G(a, y, z)$  elde edilir ve
- (d) durumu ile (5)'e dörtgen eşitsizliği denir (Okeke vd., 2021).

**Tanım 22.**  $(X, \omega^G)$  modüler  $G$ -metrik uzay.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $X$  uzayında  $x$  noktasına modüler  $G$ -yakınsaktır denir.  $\tau(\omega_{\lambda}^G)$  topolojik uzayında da  $x$  noktasına yakınsak ise,  $T: X_{\omega^G} \rightarrow X_{\omega^G}$  fonksiyonu  $x \in X_{\omega^G}$  noktasında modüler  $G$ -süreklidir denir, eğer  $\lambda > 0$  için  $\omega_{\lambda}^G(x_n, x, x) \rightarrow 0$  ise  $\omega_{\lambda}^G(Tx_n, Tx, Tx) \rightarrow 0$  (Okeke vd., 2021).

**Uyarı 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x) = 0$  oluyorsa  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $n \rightarrow \infty$  iken  $x$  noktasına modüler  $G$ -yakınsaktır. Her  $\epsilon > 0$  için en az bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki  $\omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x) < \epsilon$  durumu her  $n, m \geq n_0$  için sağlanır. Bu durumda  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  için  $x$  noktası bir  $G$ -limitidir (Okeke vd., 2021).

**Tanım 23.**  $(X, \omega^G)$  modüler  $G$ -metrik uzay verilsin. Eğer her  $\epsilon > 0$ , en az bir  $n_{\epsilon} \in \mathbb{N}$  varsa öyle ki her  $n, m, l \geq n_{\epsilon}$  ve  $\lambda > 0$  için  $\omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_l) < \epsilon$  sağlanıyorsa  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_{\omega^G}$  dizisine modüler  $G$ -Cauchy denir (Alqahtani vd., 2018).

Modüler  $G$ -metrik uzay  $X_{\omega^G}$  ye modüler  $G$ -tam denir, eğer her modüler  $G$ -Cauchy dizis  $X_{\omega^G}$  modüler  $G$ -yakınsak  $X_{\omega^G}$  uzayında bu tanım sağlanır.

**Önerme 7.**  $(X, \omega^G)$  modüler  $G$ -metrik uzay, her  $x, y, z, a \in X$  için aşağıdakiler sağlanır (Alqahtani vd., 2018):

- (1) If  $\omega_\lambda^G(x, y, z) = 0$  for all  $\lambda > 0$ , then  $x = y = z$ .
- (2)  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x, x, y) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x, x, z)$  for all  $\lambda > 0$ .
- (3)  $\omega_\lambda^G(x, y, y) \leq 2\omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x, x, y)$  for all  $\lambda > 0$ .
- (4)  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x, a, z) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(a, y, z)$  for all  $\lambda > 0$ .
- (5)  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \frac{2}{3} \left( \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x, y, a) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x, a, z) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(a, y, z) \right)$  for all  $\lambda > 0$ .
- (6)  $\omega_\lambda^G(x, y, z) \leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x, a, a) + \omega_{\frac{\lambda}{4}}^G(y, a, a) + \omega_{\frac{\lambda}{4}}^G(z, a, a)$  for all  $\lambda > 0$ .

**Önerme 8.**  $(X, \omega^G)$  modüler  $G$ -metrik uzay ve  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uzayında bir dizi  $X_{\omega^G}$ . Aşağıdakiler denktir:

- (1)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $\omega^G$ -yakınsak  $x$ ,
- (2)  $\omega_\lambda^G(x_n, x) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , yani  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x$  noktasına modüler metrik  $\omega_\lambda^G(\cdot)$  ile yakınsaktır,
- (3)  $\omega_\lambda^G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$  koşulu  $n \rightarrow \infty$  iken ve her  $\lambda > 0$  için sağlanır,
- (4)  $\omega_\lambda^G(x_n, x, x) \rightarrow 0$  koşulu  $n \rightarrow \infty$  iken ve her  $\lambda > 0$  için sağlanır,
- (5)  $\omega_\lambda^G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$  koşulu  $n, m \rightarrow \infty$  iken ve her  $\lambda > 0$  için sağlanır.

Önerme 8'in (3) ve (4) ve Mutlu (2018)' den aşağıdakiler sağlanır.

$\omega^G: (0, \infty) \times X \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$  dönüşümü modüler  $G$ -metrik uzay, yani  $X_{\omega^G}$  modüler  $G$ -metrik uzay,  $B \subseteq X_{\omega^G}$  ve  $\kappa: B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  fonksiyonu verilsin.  $\kappa$  ya  $B$  de yarısüreklidir denir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda^G(x, x_n, x_n) = 0 \Rightarrow \kappa(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n)$ , ya da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\lambda^G(x, x, x_n) = 0 \Rightarrow \kappa(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n)$  her  $\lambda > 0$  ve  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq B$ .  $B$  kapalı ise modüler  $G$ -yakınsak dizinin limiti her zaman  $B$  içindedir. Ayrıca  $B$  modüler  $G$ -sınırlı, eğer  $\delta_{\omega^G}(B) = \sup\{\omega_\lambda^G(x, y, y): x, y \in B, \forall \lambda > 0\}$  sonlu ise bu durumdan bahsedilebilir (Okeke vd., 2021).

## 4.2. Bazı Sonuçlar

Mutlu vd. (2018) modüler metrik ve modüler  $G$ - metrik sonuçları bu bölümde genişletilecektir.

**Teorem 9.**  $\omega^G$   $X$  üzerinde modüler  $G$ -metrik,  $X_{\omega^G}$  tam modüler  $G$ -metrik uzay,  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  bu uzay üzerinde altyarısürekli fonksiyon ve  $T: X_{\omega^G} \rightarrow X_{\omega^G}$  üzerine dönüşümü

$$\kappa(Tx) + \omega_\lambda^G(x, Tx, Tx) \leq \kappa(x) \quad (10)$$

Yukarıdaki şekilde her  $x \in X_{\omega^G}$  ve  $\lambda > 0$  için verilsin. O halde  $T$ ,  $X_{\omega^G}$  uzayında bir sabit noktaya sahiptir (Okeke vd., 2021).

**İspat:** Her  $x \in X_{\omega^G}$  için  $F(x) = \{y \in X_{\omega^G}: \omega_\lambda^G(x, y, y) \leq \kappa(x) - \kappa(y), \forall \lambda > 0\}$  ve  $\eta(x) = \inf\{\kappa(y): y \in F(x)\}$  tanımlansın.  $x \in F(x)$  ise  $F(x) \neq \emptyset$  ve  $0 \leq \eta(x) \leq \kappa(x)$  elde edilir.  $x \in X_{\omega^G}$  herhangi bir nokta olsun.  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  dizisini  $X_{\omega^G}$  uzayında şu şekilde oluşturalım:  $x = x_1$  ve benzer şekilde devam ederek  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçim yapılırsa  $x_{n+1} \in F(x)$  terimi de her all  $n \in \mathbb{N}$  için  $\kappa(x_{n+1}) \leq \eta(x_n) + \frac{1}{2^n}$  şeklindedir. Böylece  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  dizisi yukarıdaki koşulları sağlar.

$$\omega_\lambda^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \kappa(x_n) - \kappa(x_{n+1}), \eta(x_n) \leq \kappa(x_{n+1}) \leq \eta(x_n) + \frac{1}{2^n} \quad (11)$$

eşitsizliği her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\lambda > 0$  için sağlanır. O halde  $\{\kappa(x_n)\}_{n \geq 1}$  dizisi  $\mathbb{R}$  de artmayan bir dizi ve alttan sıfır ile sınırlıdır.  $\{\kappa(x_n)\}_{n \geq 1}$  dizisi  $M \geq 0$  reel sayısına yakınsar. (11) eşitsizliğinden,

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(x_n) \quad (12)$$

sağlansın,  $k \in \mathbb{N}$  herhangi bir sayı, (11) ve (12) eşitsizliklerinde, en az bir  $N_k$  sayısı vardır öyle ki her  $n \geq N_k$  için  $\kappa(x_n) < M + \frac{1}{2^k}$  sağlanır.  $\kappa(x_n)$  monoton olduğundan,  $m \geq n \geq N_k$  için  $M \leq \kappa(x_m) \leq \kappa(x_n) < M + \frac{1}{2^k}$  elde edilir. Buradan,

$$\kappa(x_n) - \kappa(x_m) < \frac{1}{2^k} \quad (13)$$

olduğu bulunur. Genelliği kaybetmeden  $m > n$  ve  $m, n \in \mathbb{N}$  için (11) eşitsizliğinden,

$$\omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \kappa(x_n) - \kappa(x_{n+1}), \text{ for } \frac{\lambda}{m-n} \geq \frac{\lambda}{n} > 0 \quad (14)$$

$m, n \in \mathbb{N}$  ve  $m > n \in \mathbb{N}$  için bulunur. Dörtgen eşitsizliği defalarca uygulanırsa Tanım 23 koşul (5)'ten

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_m) &\leq \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &+ \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + \cdots + \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) \\ &\quad + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + \cdots + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq \kappa(x_n) - \kappa(x_{n+1}) + \kappa(x_{n+1}) - \kappa(x_{n+2}) + \cdots + \kappa(x_{m-1}) - \kappa(x_m) \\ &= \kappa(x_n) - \kappa(x_m) \end{aligned} \quad (15)$$

eşitsizliği her  $m > n \geq N_k$  ve bazı  $N_k \in \mathbb{N}$  için elde edilir. (13) eşitsizliğinden,

$$\omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_m) < \frac{1}{2^k} \quad (16)$$

her  $m, l, n \geq N_k$  ve bazı  $N_k \in \mathbb{N}$  için elde edilen yukarıdaki eşitsizlik, Önerme 8'in (2) koşulundan,

$$\omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_l) \leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_n, x_m, x_m) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_l, x_m, x_m) \quad (17)$$

halini alır ve

$$\begin{aligned} \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_l) &\leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_n, x_m, x_m) + \lim_{l, m \rightarrow \infty} \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_l, x_m, x_m) \\ &\leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_n, x_m, x_m) + \lim_{l, m \rightarrow \infty} \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_l, x_m, x_m) \\ &< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \end{aligned} \quad (18)$$

$$= \frac{2}{2^k} = 2^{1-k}.$$

olur ve buradan,  $k \rightarrow \infty$  iken,

$$\lim_{n,m,l \rightarrow \infty} \omega_\lambda^G(x_n, x_m, x_l) = 0 \quad (19)$$

olur. Böylece,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  modüler  $G$ -Cauchy dizisidir.  $(X_\omega, \omega^G)$  tamlığı her  $\lambda > 0$  için  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \omega_\lambda^G(x_n, x_m, u) = 0$ , yani her  $\epsilon > 0$  için en az bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  var öyle ki  $\omega_\lambda^G(x_n, x_m, u) < \epsilon$  her  $n, m \in \mathbb{N}$  ve  $n, m \geq n_0$  için sağlanır, buradan  $n \rightarrow \infty$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow u \in X_{\omega^G}$  elde edilir. Fakat  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$   $X_{\omega^G}$  uzayında altyarı süreklili fonksiyon olduğundan, (15) eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \kappa(u) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\kappa(x_m)) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\kappa(x_n) - \omega_\lambda^G(x_n, x_m, x_m)) \\ &= \kappa(x_n) - \omega_\lambda^G(x_n, u, u) \end{aligned} \quad (20)$$

elde edilir, buradan da  $\omega_\lambda^G(x_n, u, u) \leq \kappa(x_n) - \kappa(u)$  olur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $u \in F(x_n)$  ve  $\eta(x_n) \leq \kappa(u)$  olur. (12) eşitsizliğinden,  $M \leq \kappa(u)$  elde edilir. Dahası, altyarı süreklilikten ve (12) eşitsizliğinden,  $\kappa(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n) = M$  olur. Böylece  $\kappa(u) = M$  olur. (10)'dan,

$Tu \in F(u)$ , ve  $u \in F(u)$ .  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} \omega_\lambda^G(x_n, Tu, Tu) &\leq \frac{\omega_\lambda^G(x_n, u, u)}{2} + \frac{\omega_\lambda^G(u, Tu, Tu)}{2} \\ &\leq \omega_\lambda^G(x_n, u, u) + \omega_\lambda^G(u, Tu, Tu) \\ &\leq \kappa(x_n) - \kappa(u) + \kappa(u) - \kappa(Tu) \\ &= \kappa(x_n) - \kappa(Tu). \end{aligned} \quad (21)$$

Elde edilir,  $Tu \in F(x_n)$  olur ve  $\eta(x_n) \leq \kappa(Tu)$  olur.

$M \leq \kappa(Tu)$ . (10) eşitsizliğinden,  $\kappa(Tu) \leq \kappa(u)$  olur.  $\kappa(u) = M$  iken,  $\kappa(u) = M \leq \kappa(Tu) \leq \kappa(u)$  hatta  $\kappa(Tu) = \kappa(u)$  bulunur. (10) eşitsizliğinden,  $\omega_\lambda^G(u, Tu, Tu) \leq \kappa(u) - \kappa(Tu) =$

$\kappa(u) - \kappa(u) = 0$ . Yani,  $Tu = u$  olur ki bu da,  $T$  dönüşümü  $X_{\omega^G}$  uzayında sabit noktaya sahiptir demektir (Okeke vd., 2021).

**Uyarı 2.**  $\omega^G$   $X$  uzayında modüler  $G$ -metrik,  $X_{\omega^G}$  tam modüler  $G$ -metrik uzay,  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  uzayında  $X_{\omega^G}$  altyarı süreklili fonksiyon ve  $T: X_{\omega^G} \rightarrow X_{\omega^G}$  üzerine dönüşüm olsun. Mutlu ve diğerlerinin [1] verdiği Teorem 9 yardımıyla (10) eşitsizliğini elde etmek için modüler  $G$  metrik tanımı her  $\lambda > 0$ ,  $\omega_\lambda(x, y, z) = \frac{1}{2\lambda}\{|x - y| + |y - z| + |x - z|\}$  olarak alınır;

$y = Tx$  ve  $z = Tx$  için (4.1) eşitsizliği her  $x \in X_\omega$  ve  $\lambda > 0$  için,

$$\omega_\lambda(x, Tx) \leq \kappa(x) - \kappa(Tx) \quad (22)$$

olur. O halde  $T$ ,  $X_\omega$  uzayında bir sabit noktaya sahiptir, yani Mutlu ve diğerlerindeki [1] sonuç elde edilir (Okeke vd., 2021).

**Teorem 10.**  $\omega^G$ ,  $X$  'de modüler  $G$ -metrik,  $X_{\omega^G}$  tam modüler  $G$ -metrik uzay,  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$   $X_{\omega^G}$  'da altyarı süreklili fonksiyon ve  $T: X_{\omega^G} \rightarrow X_{\omega^G}$  üzerine dönüşüm, bazı pozitif  $m \geq 1$ , her  $x \in X_{\omega^G}$  ve  $\lambda > 0$  için,

$$\omega_\lambda^G(x, T^m x, T^m x) \leq \kappa(x) - \kappa(T^m x) \quad (23)$$

sağlanır. O halde  $T$ ,  $X_{\omega^G}$  uzayında bazı  $m \geq 1$  için sabit noktaya sahiptir (Okeke vd., 2021).

**İspat:** Teorem 10'dan,  $T^m$  'nin bazı pozitif  $m \geq 1$  için sabit noktası  $u \in X_{\omega^G}$  alındığında, bazı pozitif  $m \geq 1$  için (23) sağlanır. Şimdi  $T^m(Tu) = T^{m+1}u = T(T^m u) = Tu$ , buradan  $Tu$   $T^m$  'nin sabit noktası olur. Dolayısıyla  $Tu = u$  olduğundan  $u$ ,  $T$  'nin sabit noktası olur.  $T$  bazı pozitif  $m \geq 1$  için  $T^m$  'nin sabit noktasıdır (Okeke vd., 2021).

Sonrasında, bu sonuçları gösteren bazı örnekler verilmiştir.

**Örnek 6.**  $X_{\omega^G} = \mathbb{R}$  ve  $\omega^G: (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  dönüşümü her  $x, y \in \mathbb{R}$  ve  $\lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x, y, y) = \frac{2}{\lambda}|x - y|$  şeklinde verilsin. Buradan  $(\mathbb{R}, \omega^G)$  uzayı tam modüler  $G$ -metrik uzay ve  $T: (\mathbb{R}, \omega^G) \rightarrow (\mathbb{R}, \omega^G)$  dönüşümü her  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  için  $Tx = \frac{1}{x}$  ve  $\kappa: (\mathbb{R}, \omega^G) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

dönüşümü  $\kappa(x) = \frac{3}{2}|x|$ ,  $\kappa(x)$  altyarı süreklili fonksiyonu verilsin. Şimdi Teorem 9 için (10) eşitsizliğine bakalım;

her  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  ve  $\lambda > 0$  için,

$$\begin{aligned}
 \omega_\lambda^G(x, Tx, Tx) &= \omega_\lambda^G\left(x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \left| x - \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right| + \left| x - \frac{1}{x} \right| \right\} \\
 &= \frac{2}{\lambda} \left| x - \frac{1}{x} \right| \\
 &= \frac{2}{\lambda} \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| = \frac{2}{\lambda} \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x} \right| \\
 &= \frac{2}{\lambda} \left( \frac{|x-1||x+1|}{|x|} \right) \\
 &\leq \frac{2}{\lambda} \left( \frac{|x-1||x+1|}{|x+1|} \right) \\
 &= \frac{2}{\lambda} |x-1| \leq |x|
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \kappa(x) - \kappa(Tx) &= \frac{3}{2}|x| - \frac{3}{2} \frac{1}{|x|} \\
 &= \frac{3}{2} \left( |x| - \frac{1}{|x|} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \left( \frac{|x|^2 - 1}{|x|} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \left( \frac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|} \right) \\
 &\leq \frac{3}{2} \left( \frac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|+1} \right) \\
 &= \frac{3}{2} (|x|-1) \\
 &\leq \frac{3}{2} |x|.
 \end{aligned}$$

elde edilir (Okeke vd., 2021).

**Uyarı 3.** Örnek 6'da  $T$  'nin sabit noktasının 1 olduğu barizdir.

**Önerme 9.**  $\omega^G$ ,  $X$  'de modüler  $G$ -metrik ve  $X_{\omega^G}$  tam modüler  $G$ -metrik uzay,  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$   $X_{\omega^G}$ 'de altyarı süreklili alttan sınırlı fonksiyonu verilsin, o halde en az bir  $u \in X_{\omega^G}$  noktası vardır öyle ki her  $z \in X_{\omega^G}, z \neq u$  ve her  $\lambda > 0$  için  $\kappa(u) < \kappa(z) + \omega_\lambda^G(u, z, z)$  bulunur (Okeke vd., 2021).

**İspat:** Teorem 10 ispatından,  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  dizisi  $n \rightarrow \infty$  iken  $z_n \rightarrow u \in X_{\omega^G}$  olsun. Her  $u \in X_{\omega^G}$  için  $F(u) = \{z \in X_{\omega^G}: \omega_\lambda^G(u, z, z) \leq \kappa(u) - \kappa(z) \forall \lambda > 0\}$  ve  $\eta(u) = \inf\{\kappa(z): z \in F(u)\}$  tanımlansın. Burada  $z \neq u$  için  $u \notin F(u)$  olduğunu göstermek yeterlidir. Bazı  $v \neq u$  için  $v \in F(u)$  alınırsa her  $\lambda > 0$  için,  $0 < \omega_\lambda^G(u, v, v) \leq \kappa(u) - \kappa(v)$  olur, buradan  $\kappa(v) < \kappa(u) = M$  elde edilir,  $n \geq 1$  için her  $\lambda > 0, v \in F(z_n)$  için,

$$\begin{aligned} \omega_\lambda^G(z_n, v, v) &\leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(z_n, u, u) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(u, v, v) \\ &\leq \omega_\lambda^G(z_n, u, u) + \omega_\lambda^G(u, v, v) \\ &\leq \kappa(z_n) - \kappa(u) + \kappa(u) - \kappa(v) \\ &= \kappa(z_n) - \kappa(v). \end{aligned} \quad (24)$$

olur. Böylece her  $n \geq 1$  için  $\eta(z_n) \leq \kappa(v)$  olur. Dahası,  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(z_n) \leq \kappa(v)$  yani;  $M \leq \kappa(v)$  olur ki buradan  $\kappa(v) < \kappa(u) = M$  çelişkisi elde edilir. Her  $z \in X_{\omega^G}, z \neq u \Rightarrow z \notin F(u)$ , yani  $z \neq u \Rightarrow \omega_\lambda^G(u, z, z) > \kappa(u) - \kappa(z)$  olur. Her  $z \in X_{\omega^G}, z \neq u$  ve her  $\lambda > 0$  için  $\kappa(u) < \kappa(z) + \omega_\lambda^G(u, z, z)$  olur (Okeke vd., 2021).

**Önerme 10.**  $\omega^G$ ,  $X$ 'de modüler  $G$ -metrik,  $X_{\omega^G}$  tam modüler  $G$ -metrik uzay,  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$   $X_{\omega^G}$ 'de altyarı süreklili alttan sınırlı fonksiyonu verilsin. Her  $y \in X_{\omega^G}$  ve  $\gamma > 0$  için en az bir  $x_0 \in X_{\omega^G}$  vardır öyle ki  $\kappa(x_0) < \kappa(x) + \gamma \omega_\lambda^G(x, x, x_0)$ ,  $X_{\omega^G} \setminus \{x_0\}$  uzayında ve her  $\lambda > 0$  için  $\kappa(x_0) \leq \kappa(y) - \gamma \omega_\lambda^G(x_0, y, y)$  sağlanır (Okeke vd., 2021).

**İspat:**  $X_{\omega^G}^\gamma = \{z \in X_{\omega^G}: \kappa(z) \leq \kappa(y) - \gamma \omega_\lambda^G(z, y, y), \forall \lambda > 0\}$  tanımlansın. O halde  $X_{\omega^G}^\gamma$  boş olmayan tam modüler  $G$ -metrik uzay ve  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  altyarı süreklili ve alttan sınırlı fonksiyonu  $X_{\omega^G}$  üzerinde verilsin.  $F(x) = \{z \in X_{\omega^G}^\gamma : \kappa(x) \geq \kappa(z) + \gamma \omega_\lambda^G(z, x, x), \forall \lambda > 0\}$  alınsın. O halde her  $x \in X_{\omega^G}^\gamma$  için  $F(x) \neq \emptyset$  ve kapalıdır. Ayrıca  $z \in F(x)$  olduğundan

$F(z) \subseteq F(x)$  elde edilir.  $x_1 \in X_{\omega G}^Y$  seçimi  $\kappa(x_1) < \infty$  olacak biçimde yapılırsa ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçimleri yapılırsa  $x_{n+1} \in F(x)$  elemanı her  $n \geq 1$  için  $\kappa(x_{n+1}) < \inf\{\kappa(u): u \in F(x_n)\} + \frac{1}{2^n}$  olacak biçimde bulunur. Her  $z \in F(x_{n+1}) \subseteq F(x_n)$  ve her  $\lambda > 0$  için,

$$\begin{aligned} \gamma\omega_{\lambda}^G(z, x_{n+1}, x_{n+1}) &\leq \gamma\omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(z, x_n, x_n) + \gamma\omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq \gamma\omega_{\lambda}^G(z, x_n, x_n) + \gamma\omega_{\lambda}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq \kappa(x_n) - \kappa(z) + \kappa(x_{n+1}) - \kappa(x_n) \\ &= \kappa(x_{n+1}) - \kappa(z) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\leq \inf\{\kappa(u): u \in F(x_n)\} - \kappa(z) + \frac{1}{2^n} \quad (25)$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \quad (25)$$

bulunur. Böylece  $n \rightarrow \infty$  iken her  $\lambda > 0$  için  $\delta_{\omega G}(F(x_n)) \rightarrow 0$  olur. Böylece  $X_{\omega G}^Y$  tam modüler  $G$ -metrik uzay ve  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(x_n) = \{x_0\}$  olur. Kesişim bir tek nokta kümesi olduğundan,  $x_0 \in F(x_n)$  ise  $n \geq 1$  için  $F(x_0) \subseteq F(x_n)$  olur, buradan  $F(x_0) = \{x_0\}$ , yani üzerinde  $X_{\omega G}^Y \setminus \{x_0\}$  her  $\lambda > 0$  için  $\kappa(x_0) < \kappa(x) + \gamma\omega_{\lambda}^G(x, x, x_0)$  elde edilir.  $\kappa(x_0) < \kappa(x) + \gamma\omega_{\lambda}^G(x, x, x_0)$  eşitsizliği  $X_{\omega G} \setminus X_{\omega G}^Y$  kümesinde  $z \notin X_{\omega G}^Y$  ve her  $\lambda > 0$  için,  $\kappa(y) - \gamma\omega_{\lambda}^G(z, y, y) < \kappa(z)$  olur,  $x_0 \in X_{\omega G}^Y$  ise,

$$\begin{aligned} \kappa(x_0) &\leq \kappa(y) - \gamma\omega_{\lambda}^G(x_0, y, y) \\ &\leq \kappa(y) - \gamma\omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(z, y, y) - \gamma\omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_0, z, z) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\leq \kappa(y) - \gamma\omega_{\lambda}^G(z, y, y) - \gamma\omega_{\lambda}^G(x_0, z, z) \quad (26)$$

$$< \kappa(z) - \gamma\omega_{\lambda}^G(x_0, z, z) \quad (26)$$

yani her  $\lambda > 0, \kappa(x_0) < \kappa(z) - \gamma\omega_{\lambda}^G(x_0, z, z)$  sonucu elde edilmiş olur (Okeke vd., 2021).

**Teorem 11.**  $\omega^G, X$  'de modüler  $G$ -metrik ve  $X_{\omega G}, Y_{\omega G}$  tam modüler  $G$ -metrik uzaylar olsun.  $T: X_{\omega G} \rightarrow X_{\omega G}$  üzerine bir dönüşüm olarak verilsin.  $L: X_{\omega G} \rightarrow Y_{\omega G}$  kapalı dönüşümü ve  $\kappa: L(X_{\omega G}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  alttan sınırlı altyarı süreklili fonksiyonu  $X_{\omega G}$  üzerinde verilsin, her  $\gamma > 0$  için en az bir  $x \in X_{\omega G}$  vardır öyle ki her  $\lambda > 0$  için,

$$\omega_\lambda^G(x, Tx, Tx) \leq \kappa(Lx) - \kappa(LTx), \quad (27)$$

$$\gamma\omega_\lambda^G(Lx, LTx, LTx) \leq \kappa(Lx) - \kappa(LTx), \quad (28)$$

sağlanır. O halde,  $T X_{\omega^G}$  'da bir sabit noktaya sahiptir (Okeke vd., 2021).

**İspat:** Her  $x \in X_{\omega^G}$  için  $Tx = y$  ve  $F(x) = \{y \in X_{\omega^G} : \omega_\lambda^G(x, y, y) \leq \kappa(x) - \kappa(Ly) \text{ ve } \gamma\omega_\lambda^G(Lx, Ly, Ly) \leq \kappa(Lx) - \kappa(Ly) \forall \lambda > 0\}$  ve  $\eta(x) = \inf\{\kappa(Ly) : y \in F(x)\}$  verilsin.  $x \in F(x)$  ise  $F(x) \neq \emptyset$  ve  $0 \leq \eta(x) \leq \kappa(Lx)$  olur.  $x \in X_{\omega^G}$  herhangi bir nokta olmak üzere  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  dizisi  $X_{\omega^G}$  uzayında şöyle oluşturulsun:

$x = x_1$  ve  $x_1, x_2, \dots, x_n$  seçimi  $x_{n+1} \in F(x)$  her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\kappa(Lx_{n+1}) \leq \eta(x_n) + \frac{1}{2^n}$  olacak biçimde olsun. Böyle devam edilirse,  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  dizisi

$$\omega_\lambda^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \kappa(x_n) - \kappa(Lx_{n+1}), \quad (29)$$

$$\gamma\omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_{n+1}, Lx_{n+1}) \leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_{n+1}), \quad (30)$$

ve

$$\kappa(Lx_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \leq \eta(x_n) \leq \kappa(Lx_{n+1}), \quad (31)$$

koşullarını her  $n \in \mathbb{N}$  ve  $\lambda > 0$  için sağlar. (29) ve (30) eşitsizliklerinden,  $\{\kappa(Lx_n)\}_{n \geq 1}$  dizisi  $\mathbb{R}$ ' de azalmayan ve alttan sıfır ile sınırlıdır. Böylece  $\{\kappa(Lx_n)\}_{n \geq 1}$  modüler  $G$ -yakınsak ve reel  $\beta \geq 0$  sayısına yakınsaktır. (31) eşitsizliğinden,

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(Lx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(x_n) \quad (32)$$

olur.  $k \in \mathbb{N}$  herhangi bir sayı, (29), (30) ve (32) eşitsizliklerinden, en az bir  $N_k$  sayısı vardır öyle ki her  $n \geq N_k$  için  $\kappa(Lx_n) < \beta + \frac{1}{2^k}$  sağlanır.  $\kappa(Lx_n)$  monoton ise,  $m \geq n \geq N_k$  ve buradan  $\beta \leq \kappa(Lx_m) \leq \kappa(Lx_n) < \beta + \frac{1}{2^k}$  olur.

$$\kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_m) < \frac{1}{2^k} \text{ for all } m \geq n \geq N_k \quad (33)$$

elde edilir. Genelliği kaybetmeden,  $m > n$  ve  $m, n \in \mathbb{N}$ 'dir. (29) ve (30)'dan,

$$\omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_{n+1}), \quad (34)$$

$$\omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(Lx_n, Lx_{n+1}, Lx_{n+1}) \leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_{n+1}), \text{ for } \frac{\lambda}{m-n} > 0, \quad (35)$$

ya da  $\frac{\lambda}{m-n} \geq \frac{\lambda}{n}$  oluyorsa,

$$\omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_{n+1}), \quad (36)$$

$$\omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(Lx_n, Lx_{n+1}, Lx_{n+1}) \leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_{n+1}), \text{ for } \frac{\lambda}{n} > 0. \quad (37)$$

elde edilir.  $m, n \in \mathbb{N}$  ve  $m > n \in \mathbb{N}$ . Dörtgen eşitsizliği tekrar edilirse, yani Tanım 20.'de (5) koşulu, her  $m > n \geq N_k$  ve bazı  $N_k \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_m) &\leq \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\quad + \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + \cdots + \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\quad + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+4}) + \cdots + \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_{n+1}) + \kappa(Lx_{n+1}) - \kappa(Lx_{n+2}) + \cdots + \\ &\quad \kappa(Lx_{m-1}) - \kappa(Lx_m) \\ &= \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_m) \end{aligned} \quad (38)$$

elde edilir. (33) eşitsizliğinden, her  $m, l, n \geq N_k$  ve bazı  $N_k \in \mathbb{N}$  için,

$$\omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_m) < \frac{1}{2k}, \quad (39)$$

elde edilir. Önerme 3 (2) koşulundan,

$$\omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_l) \leq \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_n, x_m, x_m) + \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_l, x_m, x_m) \quad (40)$$

buradan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m,l \rightarrow \infty} \omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_l) &\leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_n, x_m, x_m) + \lim_{l,m \rightarrow \infty} \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(x_l, x_m, x_m) \\
&\leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_m) + \lim_{l,m \rightarrow \infty} \omega_{\lambda}^G(x_l, x_m, x_m) \\
&< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{2}{2^k} = 2^{1-k}.
\end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$  iken,

$$\lim_{n,m,l \rightarrow \infty} \omega_{\lambda}^G(x_n, x_m, x_l) = 0 \quad (41)$$

olur.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  modüler  $G$ -Cauchy dizisidir. Benzer şekilde, her  $m > n \geq N_k$  ve bazı  $N_k \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned}
\gamma \omega_{\lambda}^G(Lx_n, Lx_m, Lx_m) &\leq \gamma \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(Lx_n, Lx_{n+1}, Lx_{n+1}) + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(Lx_{n+1}, Lx_{n+2}, Lx_{n+2}) \\
&\quad + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(Lx_{n+2}, Lx_{n+3}, Lx_{n+3}) + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(Lx_{n+3}, Lx_{n+4}, Lx_{n+4}) \\
&\quad + \cdots + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{m-n}}^G(Lx_{m-1}, Lx_m, Lx_m) \\
&\leq \gamma \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(Lx_n, Lx_{n+1}, Lx_{n+1}) + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(Lx_{n+1}, Lx_{n+2}, Lx_{n+2}) + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(Lx_{n+2}, Lx_{n+3}, Lx_{n+3}) \\
&\quad + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(Lx_{n+3}, Lx_{n+4}, Lx_{n+4}) + \cdots + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{n}}^G(Lx_{m-1}, Lx_m, Lx_m) \\
&\leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_{n+1}) + \kappa(Lx_{n+1}) - \kappa(Lx_{n+2}) + \cdots + \kappa(Lx_{m-1}) - \kappa(Lx_m) \\
&= \kappa(Lx_n) - \kappa(Lx_m) \quad (42)
\end{aligned}$$

olur. (32) eşitsizliğinden her  $m > n \geq N_k$  ve bazı  $N_k \in \mathbb{N}$  için,

$$\gamma \omega_{\lambda}^G(Lx_n, Lx_m, Lx_m) < \frac{1}{2^k} \quad (43)$$

olur. Önerme 3 (2) koşulundan,

$$\gamma \omega_{\lambda}^G(Lx_n, Lx_m, Lx_l) \leq \gamma \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(Lx_n, Lx_m, Lx_m) + \gamma \omega_{\frac{\lambda}{2}}^G(Lx_l, Lx_m, Lx_m), \quad (44)$$

yani

$$\begin{aligned} \lim_{n,m,l \rightarrow \infty} \gamma \omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_m, Lx_l) &\leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \gamma \omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_m, Lx_m) + \lim_{l,m \rightarrow \infty} \gamma \omega_\lambda^G(Lx_l, Lx_m, Lx_m) \\ &\leq \lim_{n,m \rightarrow \infty} \gamma \omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_m, Lx_m) + \lim_{l,m \rightarrow \infty} \gamma \omega_\lambda^G(Lx_l, Lx_m, Lx_m) \\ &< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \end{aligned} \quad (45)$$

$$= \frac{2}{2^k} = 2^{1-k} \quad (46)$$

olur.  $k \rightarrow \infty$  iken,

$$\lim_{n,m,l \rightarrow \infty} \gamma \omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_m, Lx_l) = 0 \quad (47)$$

elde edilir.  $\{Lx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $Y_{\omega^G}$ 'da modüler  $G$ -Cauchy dizisidir.  $(X_\omega, \omega^G)$  ve  $(Y_\omega, \omega^G)$  tamlığından her  $\lambda > 0$  için  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \omega_\lambda^G(x_n, x_m, u) = 0$ , yani her  $\epsilon > 0$  için en az bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki, her  $n, m \in \mathbb{N}$  ve  $n, m \geq n_0$  için  $\omega_\lambda^G(x_n, x_m, u) < \epsilon$  olur, bu da  $n \rightarrow \infty$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow u \in X_{\omega^G}$  ve her  $\lambda > 0$  için,  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_m, v) = 0$ , yani her  $\epsilon > 0$  için en az bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki, her  $n, m \in \mathbb{N}$  ve  $n, m \geq n_0$  için  $\omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_m, v) < \epsilon$  yani  $n \rightarrow \infty$  iken,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Lx_n \rightarrow v \in X_{\omega^G}$  olur.  $L$  kapalı bir dönüşüm olduğundan  $Lu = v$ 'dir. Fakat  $\kappa: X_{\omega^G} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$   $X_{\omega^G}$  üzerinde altyarı sürekliliği, (38) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \kappa(v) = \kappa(Lu) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\kappa(Lx_m)) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\kappa(Lx_n) - \omega_\lambda^G(x_n, x_m, x_m)) \\ &= \kappa(Lx_n) - \omega_\lambda^G(x_n, u, u) \end{aligned} \quad (48)$$

her  $\lambda > 0$  için  $\omega_\lambda^G(x_n, u, u) \leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lu)$  elde edilir. (43) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \kappa(v) = \kappa(Lu) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\kappa(Lx_m)) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} (\kappa(Lx_n) - \gamma \omega_\lambda^G(Lx_n, Lx_m, Lx_m)) \\ &= \kappa(Lx_n) - \gamma \omega_\lambda^G(Lx_n, u, u) \end{aligned} \quad (49)$$

her  $\lambda > 0$  için  $\gamma\omega_\lambda^G(Lx_n, u, u) \leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lu)$  bulunur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $u \in F(x_n)$  ve  $\eta(x_n) \leq \kappa(Lu)$  olur. (31) eşitsizliğinden,  $\beta \leq \kappa(Lu)$  bulunur.  $\kappa$  'nın altyarı sürekliliğinden ve (31) eşitsizliğinden,  $\kappa(v) = \kappa(Lu) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \kappa(x_n) = \beta$  bulunur. Dolayısıyla  $\kappa(Lu) = \beta$  olur. Önerme 9'dan,  $x \neq u \Rightarrow x \notin F(u)$  ve Önerme 10'dan  $y \notin X_{\omega^G}^Y$  olur. (25), (26) eşitsizliklerinden,  $LTu \in F(u)$ ,  $u \in F(u)$  olur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için,

$$\begin{aligned} \omega_\lambda^G(x_n, Tu, Tu) &\leq \frac{\omega_\lambda^G(x_n, u, u)}{2} + \frac{\omega_\lambda^G(u, Tu, Tu)}{2} \\ &\leq \omega_\lambda^G(x_n, u, u) + \omega_\lambda^G(u, Tu, Tu) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\leq \kappa(Lx_n) - \kappa(Lu) + \kappa(Lu) - \kappa(LTu) \quad (50)$$

$$= \kappa(Lx_n) - \kappa(LTu) \quad (50)$$

olur.  $LTu \in F(x_n)$ , ve  $\eta(Lx_n) \leq \kappa(LTu)$  bulunur.  $\beta \leq \kappa(LTu)$  sonucuna ulaşılır. (28), (29) eşitsizliklerinden,  $\kappa(LTu) \leq \kappa(Lu)$  elde edilir.  $\kappa(Lu) = \beta$  ise,  $\kappa(Lu) = \beta \leq \kappa(LTu) \leq \kappa(Lu)$  bulunur.  $\kappa(LTu) = \kappa(Lu)$  elde edilir. (28) ve (29) eşitsizliklerinden,  $\omega_\lambda^G(u, Tu, Tu) \leq \kappa(Lu) - \kappa(LTu) = \kappa(Lu) - \kappa(Lu) = 0$  bulunur. Böylece,  $Tu = u$  yani  $T$   $X_{\omega^G}$  uzayında bir sabit noktaya sahiptir (Okeke vd., 2021).

**Teorem 12.**  $\omega^G$ ,  $X$ 'de modüler  $G$ -metrik,  $X_{\omega^G}, Y_{\omega^G}$  tam modüler  $G$ -metrik uzaylar olsun.  $T: X_{\omega^G} \rightarrow X_{\omega^G}$   $m \geq 1$  pozitif sayı ile üzerine dönüşüm olsun. Her bir  $m \geq 1$  sayısı için kapalı  $L: X_{\omega^G} \rightarrow Y_{\omega^G}$  dönüşümü ve  $\kappa: L(X_{\omega^G}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  alltan sınırlı altyarı süreklili fonksiyonu ve her  $\gamma > 0$  için en az bir  $x \in X_{\omega^G}$  vardır öyle ki her  $\lambda > 0$  için,

$$\omega_\lambda^G(x, T^m x, T^m x) \leq \kappa(L^m x) - \kappa(L^m T^m x), \quad (51)$$

$$\gamma\omega_\lambda^G(L^m x, L^m T^m x, L^m T^m x) \leq \kappa(L^m x) - \kappa(L^m T^m x), \quad (52)$$

sağlanır. Öyleyse,  $T$  dönüşümü bazı pozitif  $m \geq 1$  için  $X_{\omega^G}$  uzayında bir sabit noktaya sahiptir (Okeke vd., 2021).

**İspat:** Teorem 11' den,  $T^m$  'nin sabit noktası bazı pozitif  $m \geq 1$  için  $u \in X_{\omega^G}$ , bazı pozitif  $m \geq 1$  için (51) ve (52) eşitsizliklerinden  $T^m(Tu) = T^{m+1}u = T(T^m u) = Tu$  olur, yani  $Tu$ ,  $T^m$ ' nin sabit noktasıdır. Böylece  $Tu = u$  olur.  $u$   $T$ ' nin sabit noktasıdır, çünkü bazı pozitif  $m \geq 1$  için  $T, T^m$ ' nin sabit noktasıdır (Okeke vd., 2021).

**Uyarı 4.** Teorem 12' nin sonuçları aşağıda genelleştirilmiştir.

### 4.3. Bazı Sonuçlar

Bu bölümde elde edilen tüm sabit nokta sonuçları, söz konusu olan dönüşümlerin sabit noktalarının tekliğini gerektirmez. Bu çalışmaların gelecekteki çalışma yönü olarak, burada elde edilen tek olmayan sabit nokta teoremleri için yeni sabit nokta sonuçları ispatlamak ilgi çekici olabilir. Daha kesin olarak, tek olmayan sabit nokta durumunda, modüler  $G$ -metrik uzayda bir üzerine dönüşüm olan  $T$  için, kümenin geometrik özellikleri ile  $\text{Fix}(T)$  gelecekteki bir problem olarak araştırılabilir. Ayrıca gösterimler farklı bir uzayın varlığını vurgulamak için değiştirilmiştir.

**Tanım 24.**  $S$  boştan farklı bir küme ve  $\kappa \geq 1, (\kappa \in \mathbb{R})$  verilsin.  $\eta: S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$  fonksiyonu her  $\varpi, \xi, \rho \in S$  için,

$$(\eta_1) \eta(\varpi, \xi) = 0 \Leftrightarrow \varpi = \xi,$$

$$(\eta_2) \eta(\varpi, \xi) = \eta(\xi, \varpi),$$

$$(\eta_3) \eta(\varpi, \xi) \leq \kappa[\eta(\varpi, \rho) + \eta(\rho, \xi)],$$

koşullarını sağlıyorsa  $\eta$  'ye  $S$  'de  $b$ -metrik,  $(S, \eta)$  çiftine  $b$ -metrik uzay denir (Czerwik, 1993).

$\kappa = 1$  olamsı durmunda,  $b$ -metrik yapısı bilinen metrik yapısına denk olur. Ayrıca, standard metriklerin aksine,  $b$ -metrik sürekli değildir. Benzer şekilde, sıradaki lemma  $b$ -metrik uzayda önemli özelliklere vurgu yapar.

**Önerme 11.**  $(S, \eta)$ ,  $\kappa \geq 1$  ile  $b$ -metrik uzay,  $\{\varpi_q\}$  ve  $\{\xi_q\}$  dizileri sırasıyla  $\bar{\varpi}$  ve  $\bar{\xi}$ 'ye yakınsak olsun. O halde,

$$\frac{1}{\kappa^2} \eta(\bar{\varpi}, \bar{\xi}) \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} \eta(\varpi_q, \xi_q) \leq \limsup_{q \rightarrow \infty} \eta(\varpi_q, \xi_q) \leq \kappa^2 \eta(\bar{\varpi}, \bar{\xi})$$

olur, eğer  $\bar{\varpi} = \bar{\xi}$  ise  $\lim_{q \rightarrow \infty} \eta(\bar{\varpi}_q, \bar{\xi}_q) = 0$  elde edilir. Ayrıca,  $z \in S$  için,

$$\frac{1}{\kappa}\eta(\varpi, z) \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} \eta(\varpi_q, z) \leq \limsup_{q \rightarrow \infty} \eta(\varpi_q, z) \leq \kappa\eta(\varpi, z)$$

bulunur (Aghajani, 2014). Chistyakov (2008) modüler metrik uzay yapısını  $F$ -modüler yapısı yardımıyla tanımladı. Chistyakov (2010) modüler metrik tanımını herhangi bir küme üzerinde verdi.

$S$  boştan farklı bir küme ve  $v: (0, \infty) \times S \times S \rightarrow [0, \infty]$  dönüşümü verilsin, her  $\lambda > 0$  ve  $\varpi, \xi \in S$  için:

$$v_\lambda(\varpi, \xi) = v(\lambda, \varpi, \xi)$$

şeklinde kısaca yazılabilir.

**Tanım 25.**  $S$  boştan farklı bir küme ve  $v: (0, \infty) \times S \times S \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu her  $\varpi, \xi, \rho \in S$  için:

- ( $v_1$ ) Her  $\lambda > 0$  ve  $\varpi, \xi \in S$  için  $v_\lambda(\varpi, \xi) = 0$  ancak ve ancak  $\varpi = \xi$ ,
- ( $v_2$ )  $v_\lambda(\varpi, \xi) = v_\lambda(\xi, \varpi)$  koşulu her  $\lambda > 0$  için sağlanır,
- ( $v_3$ )  $v_{\lambda+\mu}(\varpi, \xi) \leq v_\lambda(\varpi, \rho) + v_\mu(\rho, \xi)$  koşulu her  $\lambda, \mu > 0$  için sağlanır,
- ( $v_1$ ) ile aşağıdaki durum değiştirilirse,
- ( $v_1$ ) Her  $\lambda > 0$  için  $v_\lambda(\varpi, \varpi) = 0$ ,

o halde  $v$  'ye pseudomodüler denir (Chistyakov, 2010).

Ege ve Alaca (2018) modüler uzay yapısı ile  $b$ -metrik uzay yapısını biraraya getirerek yeni sonuçlar elde ettiler.

**Tanım 26.**  $S$  boştan farklı bir küme ve  $\kappa \geq 1, (\kappa \in \mathbb{R})$  verilsin.  $\ell: (0, \infty) \times S \times S \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonu her  $\varpi, \xi, \rho \in S$  için:

- ( $\ell_1$ )  $\ell_\lambda(\varpi, \xi) = 0$  for all  $\lambda > 0$  if and only if  $\varpi = \xi$ ,
- ( $\ell_2$ )  $\ell_\lambda(\varpi, \xi) = \ell_\lambda(\xi, \varpi)$  for all  $\lambda > 0$ ,
- ( $\ell_3$ )  $\ell_{\lambda+\mu}(\varpi, \xi) \leq \kappa[\ell_\lambda(\varpi, \rho) + \ell_\mu(\rho, \xi)]$  for all  $\lambda, \mu > 0$ .

$(S, \ell)$  modüler  $b$ -metrik adını alır ve kısaca Mod-b-Met-U ile gösterilir (Ege ve Alaca, 2018).

$\kappa = 1$  için Mod-b-Met-U modüler metrik uzaya dönüşür.

**Örnek 7.** Aşağıdaki uzay verilsin ve

$$l_p = \left\{ (\varpi_j) \subset \mathbb{R}: \sum_{j=1}^{\infty} |\varpi_j|^p < \infty \right\} \quad 0 < p < 1$$

her  $\lambda \in (0, \infty)$  için  $\ell_\lambda(\varpi, \xi) = \frac{m(\varpi, \xi)}{\lambda}$  alınsın, o halde,

$$m(\varpi, \xi) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |\varpi_j - \xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \varpi = \varpi_j, \xi = \xi_j \in l_p$$

$\kappa = 2^{\frac{1}{p}}$  ile  $(S, \ell)$  uzayı Mod-b-Met-U olur (Ege ve Alaca, 2018).

**Örnek 8.**  $(S, \nu)$  modüler metrik uzay ve  $p \geq 1$  reel sayısı verilsin.  $\ell_\lambda(\varpi, \xi) = (\nu_\lambda(\varpi, \xi))^p$  olur.  $t \geq 0$  için  $\Gamma(t) = t^p$  konveks ve Jensen eşitsizliğinden,

$$(\alpha + \beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p)$$

her  $\alpha, \beta \geq 0$  için sağlanır. O halde  $\kappa = 2^{p-1}$  ile  $(S, \ell)$  uzayı Mod-b-Met-U olur (Parvaneh vd., 2019).

**Tanım 27.**  $\ell, S$  üzerinde modüler  $b$ -metrik ise,

$$S_\ell = \{\xi \in S: \xi \stackrel{\ell}{\sim} \varpi\},$$

$\ell, S$  üzerinde ikili bir işlem olarak alınırsa,

$$\varpi \sim \xi \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ell_\lambda(\varpi, \xi) = 0$$

her  $\varpi, \xi \in S$  için yukarıdaki durum elde edilir (Ege ve Alaca, 2018). Ayrıca,

$$S_\ell^* = S_\ell^*(\varpi_0) = \{\varpi \in S: \exists \lambda = \lambda(\varpi) > 0 \text{ öyle ki } \ell_\lambda(\varpi, \varpi_0) < \infty\}(\varpi_0 \in S)$$

( $\varpi_0$  çevresindeki) modüler metrik uzay olur.

Mod-b-Met-U uzayın bazı topolojik özellikleri aşağıdaki gibidir.

**Tanım 28.**  $(S, \ell)$  Mod-b-Met-U ve  $(\varpi_q)_{q \in \mathbb{N}} S_\ell^*$  de bir dizi olsun.

- (i)  $q \rightarrow \infty$  iken her  $\lambda > 0$  için  $\ell_\lambda(\varpi_q, \bar{\varpi}) \rightarrow 0$ , oluyorsa  $(\varpi_q)_{q \in \mathbb{N}}$  dizisine  $\bar{\varpi} \in S_\ell^*$  ya  $\ell$ -yakınsak denir.
- (ii) Eğer her  $\lambda > 0$  için  $\lim_{q, m \rightarrow \infty} \ell_\lambda(\varpi_q, \varpi_m) = 0$  olursa  $S_\ell^*$  içindeki  $(\varpi_q)_{q \in \mathbb{N}}$  dizisine  $\ell$ -Cauchy dizisi denir.
- (iii) Eğer  $S_\ell^*$  içindeki her  $\ell$ -Cauchy dizisi yine  $S_\ell^*$  içindeki bir noktaya  $\ell$ -yakınsak ise  $S_\ell^*$  'ye  $\ell$ -tam denir (Ege ve Alaca, 2018).

Ansari (2014),  $C$ -sınıfı fonksiyonları tanıttı. Metrik sabit nokta teorisinde birçok büzülme için bu kavram ele alınmıştır.

**Tanım 29.**  $\mathcal{G}: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon, her  $p, q \in [0, \infty)$  için,  $\mathcal{G}$  sürekli ve aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $\mathcal{G}$ 'ye  $C$ -sınıfı fonksiyon denir:

$$(\mathcal{G}_1) \mathcal{G}(p, q) \leq p;$$

$$(\mathcal{G}_2) \mathcal{G}(p, q) = p \text{ ise ya } p = 0 \text{ ya da } q = 0 \text{ olur.}$$

$C$ -sınıfı fonksiyonlar kısaca  $\mathcal{C}$  ile gösterilir (Ansari, 2014).

**Örnek 9.**  $\mathcal{G}_1$  'den  $\mathcal{G}_5$  'e verilen örnekler için  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$  sağlanır (Ansari, 2014).

- (i) Her  $p, q \in [0, \infty)$  için  $\mathcal{G}_1(p, q) = p - q$  olur,
- (ii) Her  $p, q \in [0, \infty)$  ve  $0 < m < 1$  için  $\mathcal{G}_2(p, q) = mp$  olur,

(iii) Her  $p, q \in [0, \infty)$  ve  $r \in (0, \infty)$  için  $\mathcal{G}_3(p, q) = \frac{p}{(1+q)^r}$  olur,

(iv) Her  $p, q \in [0, \infty)$  ve  $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  sürekli olduğunda  $\mathcal{G}_4(p, q) = p\beta(p)$  olur,

(v) Her  $p, q \in [0, \infty)$  için  $\mathcal{G}_5(p, q) = \sqrt[n]{\ln(1 + p^n)}$  olur.

**Tanım 30.**  $\Sigma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonlarının  $\Omega$  ailesi verilsin, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bu fonksiyonlara değişken uzaklık fonksiyonu denir (Khan vd., 1984):

( $\Sigma_1$ )  $\Sigma$  sürekli ve azalmayan;

( $\Sigma_2$ )  $\Sigma(i) = 0$  ancak ve ancak  $i = 0$ .

**Tanım 31.**  $\vartheta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonlarının ailesi  $\Pi$  ile verilsin, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bu fonksiyonlara ultra değişken uzaklık fonksiyonu denir (Ansari vd. 2014):

( $\vartheta_1$ )  $\vartheta$  süreklidir;

( $\vartheta_2$ )  $\vartheta(t) > 0$  durumu her  $t > 0$  için sağlanır.

Ayrıca  $C$ -sınıf örnekleri ve özellikleri için (Ansari vd. 2020; Ansari vd. 2017) kaynaklarına bakılabilir.

Fulga ve Proca (2017a) yeni bir büzülme prensibini tanımladı ve tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremini ispatladı:  $(S, m)$  tam metrik uzay ve  $\varpi, \xi \in S$  olsun, o halde;

$$\Xi(\varpi, \xi) = m(\varpi, \xi) + |m(\varpi, \Gamma\varpi) - m(\xi, \Gamma\xi)|,$$

$\Xi$ -büzülmesi şu makalelerde de yer almaktadır (Fulga vd. 2017b; Fulga vd. 2018; Alqahtani vd. 2018). Proca (2018),  $\Xi$ -büzülmesine "max operatör" dedi ve Proca (2019) aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatladı.

**Teorem 13.**  $\Gamma: S \rightarrow S$  dönüşümü  $(S, m)$  tam metrik uzayında verilsin. Eğer her  $\varpi, \xi \in S$  için en az bir  $\alpha \in [0, 1)$  varsa  $S'$  de  $\Gamma$  dönüşümünün sabit noktası vardır (Proca, 2019) .

$$m(\Gamma\varpi, \Gamma\xi) \leq \alpha(M^*(\varpi, \xi)),$$

burada,

$$M^*(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{array}{l} m(\varpi, \xi) + |m(\varpi, \Gamma\varpi) - m(\xi, \Gamma\xi)|; \\ m(\varpi, \Gamma\varpi) + |m(\varpi, \xi) - m(\xi, \Gamma\xi)| \\ m(\xi, \Gamma\xi) + |m(\varpi, \xi) - m(\bar{\varpi}, \Gamma\varpi)|; \\ \frac{1}{2} [m(\varpi, \Gamma\xi) + m(\xi, \Gamma\varpi) + |m(\bar{\varpi}, \Gamma\varpi) - m(\xi, \Gamma\xi)|] \end{array} \right\}$$

olarak alınmıştır.

Dahası Proca (2019)  $M^*(\varpi, \xi)$  için örnek vermiş ve Ciric tip büzülmenin maksimum değerinden daha genel olduğunu göstermiştir.

**Tanım 32.**  $(S, m)$  metrik uzay ve  $\Gamma, Y: S \rightarrow S$  be iki dönüşüm verilsin. O halde, eğer bazı  $\bar{\varpi} \in S$  için  $\Gamma\bar{\varpi} = Y\bar{\varpi}$  olduğunda  $\Gamma Y\bar{\varpi} = Y\Gamma\bar{\varpi}$  oluyorsa  $\Gamma$  ve  $Y$  zayıf uyumludur denir (Jungck, 1996).

Modüler metrik yapısı sonlu olmak zorunda değildir, bu yüzden bu uzaylarda ve modüler  $b$  – metrik uzaylarda sabit noktayı bulmaya ve tekliğini göstermeye yarayan büzülme dönüşümleri için bazı kurallar olması doğaldır.

$(M_1)$  Her  $\lambda > 0$  ve  $\varpi \in S_\rho^*$  için  $\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) < \infty$  sağlanır.

$(M_2)$  Her  $\lambda > 0$  ve  $\varpi, \xi \in S_\rho^*$  için  $\ell_\lambda(\varpi, \xi) < \infty$  sağlanır.

Bu kısımda  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -büzülmeler yapısı  $\mathcal{C}$ -sınıfı fonksiyonlar ile  $\Sigma$  ve  $\vartheta$ ,  $\Xi$ -genelleştirilmiş büzülmeleri çerçevesinde modüler  $b$ -metrik uzay yapısında elde edilenlere odaklanılacaktır.

**Tanım 33.**  $S_\rho^*$  üzerinde  $\kappa \geq 1$  ile  $\ell$  modüler  $b$ -metrik ve  $\Gamma, Y, J, \zeta: S_\rho^* \rightarrow S_\rho^*$  dönüşümleri verilsin. Eğer  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}, \Sigma \in \Omega$  ve  $\vartheta \in \Pi$  için aşağıdaki koşulu sağlayan  $\Gamma, Y, J$ , ve  $\zeta$  dönüşümlerine  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -büzülme denir:

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi, Y\xi)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi))), \quad (53)$$

burada her  $\varpi, \xi \in S_\rho^*$  ve  $\lambda > 0$  için;

$$\Xi(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi) + |\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi) - \ell_\lambda(J\xi, Y\xi)|; \\ \ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi) + |\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi) - \ell_\lambda(J\xi, Y\xi)| \ell_\lambda(J\xi, Y\xi) + |\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi) - \ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta\varpi, Y\xi) + \ell_{2\lambda}(J\xi, \Gamma\varpi)}{\kappa} + |\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi) - \ell_\lambda(J\xi, Y\xi)| \right] \end{array} \right\}$$

sağlanır (Öztürk, 2022).

**Teorem 14.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  sabiti ile  $\ell$  – tam Mod-b-Met-U olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

- (i)  $\Gamma, Y, J$ , ve  $\zeta$  dönüşümleri  $\Gamma(S_\ell^*) \subset J(S_\ell^*)$  ve  $Y(S_\ell^*) \subset \zeta(S_\ell^*)$  ile  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -büzülme dönüşümüdür,
- (ii)  $\Gamma(S_\ell^*), J(S_\ell^*), Y(S_\ell^*)$  ve  $\zeta(S_\ell^*)$  kümelerinden biri  $S_\ell^*$ ' nin kapalı alt kümesidir,
- (iii)  $\{J, Y\}$  ve  $\{\zeta, \Gamma\}$  ikilileri zayıf uyumludur.

Eğer  $(M_1)$  koşulu sağlanırsa  $\Gamma, Y, J$  ve  $\zeta S_\ell^*$  'de ortak bir sabit noktaya sahiptir. Eğer  $(M_2)$  koşulu da sağlanırsa  $\Gamma, Y, J$  ve  $\zeta$  tektir (Öztürk, 2022).

**İspat:**  $\varpi_0 \in S_\ell^*$  herhangi bir nokta verilsin. ( i ) durumuna bakılırsa,  $\varpi_1 \in S_\ell^*$  noktası vardır öyle ki  $\xi_0 = \Gamma\varpi_0 = J\varpi_1$  sağlanır. Benzer şekilde,  $\varpi_2 \in S_\ell^*$  vardır öyle ki  $\xi_1 = Y\varpi_1 = \zeta\varpi_2$  olur ve  $Y(S_\ell^*) \subseteq \zeta(S_\ell^*)$  sağlanır. Benzer şekilde devam edilirse,  $\{\xi_q\}$  dizisi,

$$\xi_{2q} = \Gamma\varpi_{2q} = J\varpi_{2q+1} \text{ ve } \xi_{2q+1} = Y\varpi_{2q+1} = \zeta\varpi_{2q+2}$$

şeklinde oluşturulur ve burada  $\xi_{q_0} \neq \xi_{q_0+1}$  olduğu kabul edilsin, çünkü eğer bazı  $q_0$  için  $\xi_{q_0} = \xi_{q_0+1}$  kabul edilirse ispat açıktır. Her  $\lambda > 0$  için  $\ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1}) > 0$  sağlanır. (1)' den,

$$\Sigma \left( \kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi_{2q}, Y\varpi_{2q+1}) \right) \leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \right), \vartheta \left( \Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \right) \right),$$

elde edilir, burada

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \\ \left. \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta\varpi_{2q}, J\varpi_{2q+1}) + |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2q}, \Gamma\varpi_{2q}) - \ell_\lambda(J\varpi_{2q+1}, Y\varpi_{2q+1})| \ell_\lambda(\zeta\varpi_{2q}, \Gamma\varpi_{2q}) \\ + |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2q}, J\varpi_{2q+1}) - \ell_\lambda(J\varpi_{2q+1}, Y\varpi_{2q+1})| \ell_\lambda(J\varpi_{2q+1}, Y\varpi_{2q+1}) + \\ |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2q}, J\varpi_{2q+1}) - \ell_\lambda(\zeta\varpi_{2q}, \Gamma\varpi_{2q})| \end{array} \right\} \\ \left. \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta\varpi_{2q}, Y\varpi_{2q+1}) + \ell_{2\lambda}(J\varpi_{2q+1}, \Gamma\varpi_{2q})}{\kappa} + |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2q}, \Gamma\varpi_{2q}) - \ell_\lambda(J\varpi_{2q+1}, Y\varpi_{2q+1})| \right] \right] \right\}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) + |\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) - \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \\ \ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) + \ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) - \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1}) \\ \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1}) + \ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) - \ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) | \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\xi_{2q-1}, \xi_{2q+1}) + \ell_{2\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q})}{\kappa} + |\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) - \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \right] \end{array} \right\}$$

olarak seçilmiştir. Şimdi,  $\sigma_q = \ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q)$  olduğu kabul edilsin ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\ell_{2\lambda}(\xi_{2q-1}, \xi_{2q+1}) \leq \kappa [\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q}) + \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})]$$

elde edilir ve buradan,

$$\Sigma(\kappa^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \right), \vartheta \left( \Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \right) \right) \quad (54)$$

bulunur, elbette aşağıdaki seçime uygun olarak:

$$\Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \leq \max \left\{ \sigma_{2q} + |\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}|; \sigma_{2q+1} + |\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}|; \frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa(\sigma_{2q} + \sigma_{2q+1})}{\kappa} + |\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}| \right] \right\}.$$

Eğer  $\sigma_{2q+1} \geq \sigma_{2q}$  alınırsa,

$$\Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \leq \max \left\{ \sigma_{2q+1}, \frac{\sigma_{2q} + \sigma_{2q+1} + \sigma_{2q+1} - \sigma_{2q}}{2} \right\} = \sigma_{2q+1}$$

bulunur ki buradan da,

$$\Sigma(\sigma_{2q+1}) \leq \Sigma(\kappa^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G} \left( \Sigma(\sigma_{2q+1}), \vartheta(\sigma_{2q+1}) \right) \leq \Sigma(\sigma_{2q+1}),$$

elde edilir, yani

$$\mathcal{G} \left( \Sigma(\sigma_{2q+1}), \vartheta(\sigma_{2q+1}) \right) = \Sigma(\sigma_{2q+1}),$$

olur.

$(\mathcal{G}_2)$ ' den, ya  $\Sigma(\sigma_{2q+1}) = 0$  ya da  $\vartheta(\sigma_{2q+1}) = 0$  olur. Tersine bir kabulde iki durum oluşur.  $\sigma_{2q+1} < \sigma_{2q}$  için,  $|\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}| = \sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}$  elde edilir ve aşağıdaki eşitsizlik bulunur;

$$\mathbb{E}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) \leq \max\left\{2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}, \sigma_{2q+1} \frac{\sigma_{2q} + \sigma_{2q+1} + \sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}}{2}\right\}.$$

$[2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1} > \sigma_{2q} > \sigma_{2q+1}]$  olduğundan,

$$\mathbb{E}(\omega_{2q}, \omega_{2q+1}) = \max\{2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}, \sigma_{2q+1}, \sigma_{2q}\} = 2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1} \quad (55)$$

bulunur, benzer adımlar tekrar edilirse  $\sigma_{2q} < \sigma_{2q-1}$  olduğu görülür. Buradan  $\sigma_{q+1} < \sigma_q$  olur. Dolayısıyla  $\{\sigma_q\} = \{\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q)\}$  dizisi artmayan ve negatif olmayan sayılardan oluşan bir dizidir. Burada  $\tau \geq 0$  vardır öyle ki her  $\lambda > 0$  için  $\lim_{q \rightarrow \infty} \sigma_q = \tau$  elde edilir. Şimdi  $\tau = 0$  olduğu gösterilecektir.

$(\mathcal{G}_1)$  ve (3) kullanılarak, (2) eşitsizliğinden,

$$\Sigma(\sigma_{2q+1}) \leq \Sigma(\kappa^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma(2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1}), \vartheta(2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1})\right) \leq \Sigma(2\sigma_{2q} - \sigma_{2q+1})$$

elde edilir, burada eşitsizlik için alttan limit alınırsa,

$$\Sigma(\tau) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\tau), \vartheta(\tau)) \leq \Sigma(\tau)$$

ve sonuç olarak,  $\mathcal{G}(\Sigma(\tau), \vartheta(\tau)) = \Sigma(\tau)$  bulunur.  $(\mathcal{G}_2)$ ' den, ya  $\Sigma(\tau) = 0$  ya da  $\vartheta(\tau) = 0$  bulunur ki bu da,  $\tau = 0$  olması yani her  $\lambda > 0$  için,

$$\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q) \rightarrow 0, (q \rightarrow \infty) \quad (56)$$

sağlanması demektir. Burada  $\{\xi_q\}$  dizisi  $\ell$ -Cauchy dizisidir.  $\{\xi_{2q}\}$  dizisinin de bir  $\ell$ -Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. Tersine kabul edilirse, her  $\varepsilon > 0$  için  $\{a_i\}$  ve  $\{b_i\}$  pozitif değerli

dizileri  $b_i > a_i \geq i$  koşulunu sağlayacak şekilde  $b_i$  en küçük değer olmak üzere seçilirse her  $\lambda > 0$  için

$$\ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i}) \geq \varepsilon \text{ ve } \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i-2}) < \varepsilon, \quad (57)$$

elde edilir. (57)' den,

$$\varepsilon \leq \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i}) \leq \kappa \ell_{\frac{\lambda}{2}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i+1}) + \kappa \ell_{\frac{\lambda}{2}}(\xi_{2b_i+1}, \xi_{2b_i})$$

bulunur.  $i \rightarrow \infty$  iken üst limite bakılırsa ve (56) kullanılırsa,

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i+1}) \geq \frac{\varepsilon}{\kappa}, \text{ her } \lambda > 0 \quad (58)$$

sonucu ( $\ell_3$ ) için,

$$\begin{aligned} \ell_\lambda(\xi_{2a_{i-1}}, \xi_{2b_i}) &\leq \kappa \ell_{\frac{\lambda}{2}}(\xi_{2a_{i-1}}, \xi_{2a_i}) + \kappa^2 \ell_{\frac{\lambda}{2}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i-2}) \\ &\quad + \kappa^3 \ell_{\frac{\lambda}{4}}(\xi_{2b_i-2}, \xi_{2b_i-1}) + \kappa^3 \ell_{\frac{\lambda}{4}}(\xi_{2b_i-1}, \xi_{2b_i}) \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür ve yine  $i \rightarrow \infty$  ike limit alınır, yine (53) ve (58) yardımı ile yukarıdaki eşitsizlik her  $\lambda > 0$  için,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \ell_\lambda(\xi_{2a_{i-1}}, \xi_{2b_i}) \leq \kappa^2 \varepsilon, \quad (59)$$

halini alır, burada (1)' den,

$$\Sigma \left( \kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma \varpi_{2a_i}, Y \varpi_{2b_i+1}) \right) \leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \Xi(\varpi_{2a_i}, \varpi_{2b_i+1}) \right), \vartheta \left( \Xi(\varpi_{2a_i}, \varpi_{2b_i+1}) \right) \right) \quad (60)$$

eşitsizliği aşağıdaki seçime bağlı olarak bulunur:

$$\Xi(\varpi_{2a_i}, \varpi_{2b_i+1})$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta\varpi_{2a_i}, J\varpi_{2b_i+1}) + |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2a_i}, \Gamma\varpi_{2a_i}) - \ell_\lambda(J\varpi_{2b_i+1}, \Upsilon\varpi_{2b_i+1})|; \\ \ell_\lambda(\zeta\varpi_{2a_i}, \Gamma\varpi_{2a_i}) + |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2a_i}, J\varpi_{2b_i+1}) - \ell_\lambda(J\varpi_{2b_i+1}, \Upsilon\varpi_{2b_i+1})|; \\ \ell_\lambda(J\varpi_{2b_i+1}, \Upsilon\varpi_{2b_i+1}) + |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2a_i}, J\varpi_{2b_i+1}) - \ell_\lambda(\zeta\varpi_{2a_i}, \Gamma\varpi_{2a_i})| \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta\varpi_{2a_i}, \Upsilon\varpi_{2b_i+1}) + \ell_{2\lambda}(J\varpi_{2b_i+1}, \Gamma\varpi_{2a_i})}{\kappa} + \right. \\ \left. |\ell_\lambda(\zeta\varpi_{2a_i}, \Gamma\varpi_{2a_i}) - \ell_\lambda(J\varpi_{2b_i+1}, \Upsilon\varpi_{2b_i+1})| \right] \end{array} \right\}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) + |\ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) - \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i+1})|; \\ \ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) + |\ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) - \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i+1})|; \\ \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i+1}) + \ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) - \ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) |; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i+1}) + \ell_{2\lambda}(\xi_{2b_i}, \xi_{2a_i})}{\kappa} + \right. \\ \left. |\ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) - \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i+1})| \right] \end{array} \right\}$$

Ayrıca  $(\ell_3)$  kullanılırsa,

$$\ell_{2\lambda}(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i+1}) \leq \kappa[\ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i}) + \ell_\lambda(\xi_{2b_i}, \xi_{2b_i+1})] \quad (61)$$

$$\ell_{2\lambda}(\xi_{2b_i}, \xi_{2a_i}) \leq \kappa[\ell_\lambda(\xi_{2b_i}, \xi_{2a_i-1}) + \ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2a_i})] \quad (61)$$

sonucuna ulaşılır. (60) ve (61) eşitsizliklerinden  $\Xi(\varpi_{2a_i}, \varpi_{2b_i+1}) \leq \ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i})$ , yani,

$$\Sigma\left(\kappa^3 \ell_\lambda(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i+1})\right) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma\left(\ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i})\right), \vartheta\left(\ell_\lambda(\xi_{2a_i-1}, \xi_{2b_i})\right)\right) \quad (62)$$

eşitsizliği bulunur. Sırasıyla (6), (7), ve  $(\mathcal{G}_1)$  uygulanır ve  $(i \rightarrow \infty)$  iken (10)' da limit lamırsa,

$$\Sigma\left(\kappa^3 \frac{\varepsilon}{\kappa}\right) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\kappa^2 \varepsilon), \vartheta(\kappa^2 \varepsilon)) \leq \Sigma(\kappa^2 \varepsilon)$$

yani

$$\mathcal{G}(\Sigma(\kappa^2 \varepsilon), \vartheta(\kappa^2 \varepsilon)) = \Sigma(\kappa^2 \varepsilon)$$

elde edilir burada, ya  $\Sigma(\kappa^2 \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$  ya da  $\vartheta(\kappa^2 \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$  sağlanır.  $\kappa \geq 1$  ve  $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$  için çelişki elde edilir,  $\{\xi_{2q}\}$  dizisi bir  $\ell$ -Cauchy dizisidir. Böylece,  $\{\xi_q\}$  dizisi  $S_\ell^*$  uzayında  $\ell$ -Cauchy dizisi olur.  $S_\ell^*$  ise  $\ell$ -tam bir Mod-b-Met-U olur, en az bir  $c \in S_\ell^*$  vardır öyle ki,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_q = c \quad (4.54)$$

elde edilir. Kabul edelim ki  $\Gamma c = \Upsilon c = Jc = \zeta c = c$  olsun. Daha önce  $\Gamma c = \zeta c = c$  olduğu ispatlanmıştı ve  $c$  burada  $\Gamma$  ve  $\zeta$  dönüşümleri için ortak bir sabit nokta olur. Bu durumda aşağıdakiler açıktır:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \xi_{2q} &= \lim_{q \rightarrow \infty} \Gamma \varpi_{2q} = \lim_{q \rightarrow \infty} J \varpi_{2q+1} = c \\ \lim_{q \rightarrow \infty} \xi_{2q+1} &= \lim_{q \rightarrow \infty} \Upsilon \varpi_{2q+1} = \lim_{q \rightarrow \infty} \zeta \varpi_{2q+2} = c \end{aligned}$$

Hipoteze yeniden bakılırsa,  $\zeta(S_\ell^*)$  kümesi  $S_\ell^*$ 'nin kapalı alt kümesi idi, o halde en az bir  $u \in S_\ell^*$  vardır öyle ki  $c = \zeta u$  sağlanır.  $\Gamma u = c$  olduğu iddia edilsin.  $\varpi$  ve  $\xi$  (1)'de sırasıyla  $u$  ve  $\varpi_{2q+1}$  ile yer değiştirsin:

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma u, \Upsilon \varpi_{2q+1})) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma(\Xi(u, \varpi_{2q+1})), \vartheta(\Xi(u, \varpi_{2q+1}))\right)$$

eşitsizliği aşağıdaki durum için elde edilir

$$\begin{aligned} \Xi(u, \varpi_{2q+1}) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta u, J \varpi_{2q+1}) + |\ell_\lambda(\zeta u, \Gamma u) - \ell_\lambda(J \varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1})| \\ \ell_\lambda(\zeta u, \Gamma u) + |\ell_\lambda(\zeta u, J \varpi_{2q+1}) - \ell_\lambda(J \varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1})| \\ \ell_\lambda(J \varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1}) + |\ell_\lambda(\zeta u, J \varpi_{2q+1}) - \ell_\lambda(\zeta u, \Gamma u)| \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta u, \Upsilon \varpi_{2q+1}) + \ell_{2\lambda}(J \varpi_{2q+1}, \Gamma u)}{\kappa} + |\ell_\lambda(\zeta u, \Gamma u) - \ell_\lambda(J \varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1})| \right] \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(c, \xi_{2q}) + |\ell_\lambda(c, \Gamma u) - \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \\ \ell_\lambda(c, \Gamma u) + |\ell_\lambda(c, \xi_{2q}) - \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \\ \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1}) + |\ell_\lambda(c, \xi_{2q}) - \ell_\lambda(c, \Gamma u)| \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(c, \xi_{2q+1}) + \ell_{2\lambda}(\xi_{2q}, \Gamma u)}{\kappa} + |\ell_\lambda(c, \Gamma u) - \ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \right] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(11) ve  $(\mathcal{G}_1)$  kullanılırsa ve  $q \rightarrow \infty$  iken limit alınırsa,

$$\ell_{2\lambda}(\xi_{2q}, \Gamma u) \leq \kappa [\ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1}) + \ell_{\lambda}(\xi_{2q+1}, \Gamma u)],$$

yani  $\Xi(u, \varpi_{2q+1}) \leq \ell_{\lambda}(c, \Gamma u)$  elde edilir. Ayrıca,

$$\Sigma(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c)) \leq \Sigma(\kappa^3 \ell_{\lambda}(\Gamma u, c)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c)), \vartheta(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c))) \leq \Sigma(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c))$$

eşitsizliğinden,

$$\mathcal{G}(\Sigma(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c)), \vartheta(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c))) = \Sigma(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c))$$

bulunur,  $(\mathcal{G}_2)$ ' den, ya  $\Sigma(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c)) = 0$  ya da  $\vartheta(\ell_{\lambda}(\Gamma u, c)) = 0$  olur ki buradan da  $\ell_{\lambda}(\Gamma u, c) = 0 \Leftrightarrow \Gamma u = c$  olur, dahası  $\Gamma u = \zeta u = c$  olduğu elde edilir.  $\Gamma$  ve  $\zeta$  ardönüşümleri zayıf uyumlu olduğundan  $\Gamma c = \Gamma \zeta u = \zeta \Gamma u = \zeta c$  elde edilir.  $\Gamma c = c$  olduğu iddia edilsin.

(1)' den,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_{\lambda}(\Gamma c, \Upsilon \varpi_{2q+1})) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(c, \varpi_{2q+1})), \vartheta(\Xi(c, \varpi_{2q+1}))),$$

eşitsizliği aşağıdaki durum için elde edilir:

$$\begin{aligned} \Xi(c, \varpi_{2q+1}) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_{\lambda}(\zeta c, J\varpi_{2q+1}) + |\ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c) - \ell_{\lambda}(J\varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1})|; \\ \ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c) + |\ell_{\lambda}(\zeta c, J\varpi_{2q+1}) - \ell_{\lambda}(J\varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1})| \\ \ell_{\lambda}(J\varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1}) + |\ell_{\lambda}(\zeta c, J\varpi_{2q+1}) - \ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c)| \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta c, \Upsilon \varpi_{2q+1}) + \ell_{2\lambda}(J\varpi_{2q+1}, \Gamma c)}{\kappa} + |\ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c) - \ell_{\lambda}(J\varpi_{2q+1}, \Upsilon \varpi_{2q+1})| \right] \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_{\lambda}(\Gamma c, \xi_{2q}) + |\ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c) - \ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \\ \ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c) + |\ell_{\lambda}(\Gamma c, \xi_{2q}) - \ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \\ \ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1}) + |\ell_{\lambda}(\Gamma c, \xi_{2q}) - \ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c)| \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\Gamma c, \xi_{2q+1}) + \ell_{2\lambda}(\xi_{2q}, \Gamma c)}{\kappa} + |\ell_{\lambda}(\zeta c, \Gamma c) - \ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})| \right] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(11),  $(\mathcal{G}_1)$  yardımı ile,

$$\ell_{2\lambda}(\xi_{2q}, \Gamma c) \leq \kappa [\ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1}) + \ell_{\lambda}(\xi_{2q+1}, \Gamma c)]$$

$q \rightarrow \infty$  iken,

$$\Xi(c, \varpi_{2q+1}) \leq \ell_\lambda(\Gamma c, c)$$

ve,

$$\Sigma(\ell_\lambda(\Gamma c, c)) \leq \Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma c, c)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\Gamma c, c)), \vartheta(\Xi(\Gamma c, c))) \leq \Sigma(\Xi(\Gamma c, c))$$

elde edilir ki buradan,

$$\mathcal{G}(\Sigma(\ell_\lambda(\Gamma c, c)), \vartheta(\ell_\lambda(\Gamma c, c))) = \Sigma(\ell_\lambda(\Gamma c, c))$$

sonucuna ulaşılır.  $(\mathcal{G}_2)$ ' den, ya  $\Sigma(\ell_\lambda(\Gamma c, c)) = 0$  ya da  $\vartheta(\ell_\lambda(\Gamma c, c)) = 0$  elde edilir. Bu da  $\Gamma c = c$  olduğunu gösterir. Şimdi  $c$  noktasının  $Y$  ve  $J$  dönüşümleri için sabit nokta olduğu gösterilecektir. Çünkü  $\Gamma(S_\rho^*) \subset J(S_\rho^*)$  olur ve  $v \in S_\rho^*$  ' de bir eleman olmak üzere  $\Gamma c = Jv$  sağlanır. Buradan da,  $\Gamma c = Jv = \zeta c = c$  olur.  $Yv = c$  olduğu iddia edilsin. (1)' den

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma c, Yv)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(c, v)), \vartheta(\Xi(c, v)))$$

eşitsizliği aşağıdaki kabul için elde edilir.

$$\begin{aligned} \Xi(c, v) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta c, Jv) + |\ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) - \ell_\lambda(Jv, Yv)|; \\ \ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) + |\ell_\lambda(\zeta c, Jv) - \ell_\lambda(Jv, Yv)|; \\ \ell_\lambda(Jv, Yv) + |\ell_\lambda(\zeta c, Jv) - \ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta c, Yv) + \ell_{2\lambda}(Jv, \Gamma c)}{\kappa} + |\ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) - \ell_\lambda(Jv, Yv)| \right] \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta c, c) + |\ell_\lambda(\zeta c, c) - \ell_\lambda(c, Yv)|; \\ \ell_\lambda(\zeta c, c) + |\ell_\lambda(\zeta c, c) - \ell_\lambda(c, Yv)|; \\ \ell_\lambda(c, Yv) + |\ell_\lambda(\zeta c, c) - \ell_\lambda(\zeta c, c)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(c, Yv) + \ell_{2\lambda}(c, \Gamma c)}{\kappa} + |\ell_\lambda(c, \Gamma c) - \ell_\lambda(c, Yv)| \right] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Burada  $\ell_{2\lambda}(c, Yv) \leq \kappa[\ell_\lambda(c, \xi_{2q}) + \ell_\lambda(\xi_{2q}, Yv)]$  olduğundan  $\Xi(c, v) \leq \ell_\lambda(c, Yv)$  sonucuna ulaşılır.  $(\mathcal{G}_1)$  kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\Sigma(\ell_\lambda(c, Yv)) &\leq \Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(c, Yv)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\ell_\lambda(c, Yv)), \vartheta(\ell_\lambda(c, Yv))) \\ &\leq \Sigma(\ell_\lambda(c, Yv))\end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathcal{G}(\Sigma(\ell_\lambda(c, Yv)), \vartheta(\ell_\lambda(c, Yv))) = \Sigma(\ell_\lambda(c, Yv))$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $(\mathcal{G}_2)$  kullanılarak,  $Yv = c$  elde edilir.  $Y$  ve  $J$  dönüşümlerinin zayıf uyumlu olmasından  $Yc = YJv = JJv = Jc$  bulunur.

$Y_c = c$  olduğunu göstermek için sıradaki adımlar uygulanırsa, (1)' den,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma c, Yc)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(c, c)), \vartheta(\Xi(c, c)))$$

eşitsizliği aşağıdaki kabul ile sağlanır:

$$\begin{aligned}\Xi(c, c) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta c, Jc) + |\ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) - \ell_\lambda(Jc, Yc)|; \\ |\ell_\lambda(\zeta c, Jc) - \ell_\lambda(Jc, Yc)|; \\ \ell_\lambda(Jc, Yc) + |\ell_\lambda(\zeta c, Jc) - \ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta c, Yc) + \ell_{2\lambda}(Jc, \Gamma c)}{\kappa} + |\ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) - \ell_\lambda(Jc, Yc)| \right] \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(c, Yc) + |\ell_\lambda(c, c) - \ell_\lambda(Yc, Yc)|; \\ \ell_\lambda(\zeta c, c) + |\ell_\lambda(\zeta c, c) - \ell_\lambda(c, Yc)|; \\ \ell_\lambda(c, Yv) + |\ell_\lambda(\zeta c, c) - \ell_\lambda(\zeta c, c)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(c, Yc) + \ell_{2\lambda}(Yc, c)}{\kappa} + |\ell_\lambda(c, c) - \ell_\lambda(Yc, Yc)| \right] \end{array} \right\}\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\Xi(c, c) = \max \left\{ \ell_\lambda(Y_{c,c}), \frac{\ell_{2\lambda}(Y_{c,c})}{\kappa} \right\} = \ell_\lambda(Y_{c,c})$$

olur ve  $(\mathcal{G}_1)$  koşulundan,

$$\Sigma(\ell_\lambda(c, Y_c)) \leq \Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(Y_{c,c})) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma(\ell_\lambda(Y_{c,c})), \vartheta(\ell_\lambda(Y_{c,c}))\right) \leq \Sigma(\ell_\lambda(Y_c, c))$$

olur ki buradan da,

$$\mathcal{G}\left(\Sigma(\ell_\lambda(c, Y_c)), \vartheta(\ell_\lambda(c, Y_c))\right) = \Sigma(\ell_\lambda(c, Y_c))$$

bulunur.  $(\mathcal{G}_2)$ ' den,  $\Gamma c = Yc = \zeta c = Jc = c$  elde edilir.  $\Gamma(S_\ell^*) \subset J(S_\ell^*)$  ve  $Y(S_\ell^*) \subset \zeta(S_\ell^*)$  olduğundan, benzer hesaplamalarla  $J(S_\ell^*)$  (ya da  $\Gamma(S_\ell^*), Y(S_\ell^*)$ ) kapalı olduğu sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak  $\Gamma, Y, J$ , ve  $\zeta$  dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığı ve tekliği için başka bir sabit noktanın varlığı kabul edilsin,  $c^*$  seçilsin, o halde sabit noktanın tanımından;  $c^* = \Gamma c^* = Yc^* = Jc^* = \zeta c^*$  olur ve  $c \neq c^*$  dir. (1)' den,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma c, Yc^*)) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma(\Xi(c, c^*)), \vartheta(\Xi(c, c^*))\right)$$

eşitsizliği aşağıdaki seçim için elde edilir:

$$\Xi(c, c^*) = \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\zeta c, Jc^*) + |\ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) - \ell_\lambda(Jc^*, Yc^*)|; \\ \ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) + |\ell_\lambda(\zeta c, Jc^*) - \ell_\lambda(Jc^*, Yc^*)|; \\ \ell_\lambda(Jc^*, Yc^*) + |\ell_\lambda(\zeta c, Jc^*) - \ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\zeta c, Yc^*) + \ell_{2\lambda}(Jc^*, \Gamma c)}{\kappa} + \right. \\ \left. |\ell_\lambda(\zeta c, \Gamma c) - \ell_\lambda(Jc^*, Yc^*)| \right] \end{array} \right\}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(c, c^*) + |\ell_\lambda(c, c) - \ell_\lambda(c^*, c^*)|; \\ \ell_\lambda(c, c) + |\ell_\lambda(c, c^*) - \ell_\lambda(c^*, c^*)|; \\ \ell_\lambda(c^*, c^*) + |\ell_\lambda(c, c^*) - \ell_\lambda(c, c)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(c, c^*) + \ell_{2\lambda}(c^*, c)}{\kappa} + \right. \\ \left. |\ell_\lambda(c, c) - \ell_\lambda(c^*, c^*)| \right] \end{array} \right\}$$

$$= \max \left\{ \ell_\lambda(c, c^*), \frac{\ell_{2\lambda}(c, c^*)}{\kappa} \right\} = \ell_\lambda(c, c^*)$$

$(\mathcal{G}_1)$ ' den,

$$\Sigma(\ell_\lambda(c, c^*)) \leq \Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(c, c^*)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\ell_\lambda(c, c^*)), \vartheta(\ell_\lambda(c, c^*))) \leq \Sigma(\ell_\lambda(c, c^*))$$

olduğundan,

$$\mathcal{G}(\Sigma(\ell_\lambda(c, c^*)), \vartheta(\ell_\lambda(c, c^*))) = \Sigma(\ell_\lambda(c, c^*))$$

sonucuna ulaşılır ki bu da  $c = c^*$  demektir, yani  $\Gamma, Y, J$  ve  $\zeta$  dönüşümlerinin sabit noktası tektir (Öztürk, 2022).

Bu sonuç yardımıyla elde edilen diğer sonuçlar aşağıda verilmiştir:

**Sonuç 3.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  sabiti ile  $\ell$ -tam Mod-b-Met-U ve  $\Gamma, Y: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  üzerine dönüşümü verilsin. Aşağıdakiler sağlanır:

(i) Bir  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}, \Sigma \in \Omega$  ve  $\vartheta \in \Pi$  vardır öyle ki,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi, Y\xi)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi)))$$

sonucu her  $\varpi, \xi \in S_\ell^*$  ve her  $\lambda > 0$  için aşağıdaki kabul yapıldığında,

$$\Xi(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\varpi, \xi) + |\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) - \ell_\lambda(\xi, Y\xi)|; \\ \ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) + |\ell_\lambda(\varpi, \xi) - \ell_\lambda(\xi, Y\xi)|; \\ \ell_\lambda(\xi, Y\xi) + |\ell_\lambda(\varpi, \xi) - \ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\varpi, Y\xi) + \ell_{2\lambda}(\xi, \Gamma\varpi)}{\kappa} + |\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) - \ell_\lambda(\xi, Y\xi)| \right] \end{array} \right\}$$

sağlanır.

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır.

Bu koşullar sağlanırsa,  $\Gamma$  ve  $Y$   $S_\ell^*$  de ortak bir sabit noktaya sahiptir (Öztürk, 2022).

$\Gamma = Y$  olması durumu Sonuç 4'de verilmiştir.

**Sonuç 4.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile bir  $\ell$ -tam Mod-b-Met-U ve  $\Gamma: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümü verilsin. Aşağıdakiler sağlanır:

(i)  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}, \Sigma \in \Omega$  ve  $\vartheta \in \Pi$  vardır öyle ki,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi)))$$

eşitsizliği her  $\varpi, \xi \in S_\ell^*$  ve her  $\lambda > 0$  için sağlanır.

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır.

Bu koşullar sağlanırsa,  $\Gamma S_\ell^*$  de bir sabit noktaya sahiptir (Öztürk, 2022).

Sıradaki sonuçta; yukarıda verilen sonuca benzer şekilde ancak bu kez her  $p, q \in [0, \infty)$  için  $\mathcal{G}(p, q) = p - q$  seçilerek araştırma yapılmıştır.

**Sonuç 5.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile bir  $\ell$ -tam Mod-b-Met-U ve  $\Gamma: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümü verilsin. Aşağıdakiler sağlanır:

(i)  $\Sigma \in \Omega$  ve  $\vartheta \in \Pi$  vardır öyle ki,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)) \leq \Sigma(\Xi(\varpi, \xi)) - \vartheta(\Xi(\varpi, \xi))$$

eşitsizliği her  $\varpi, \xi \in S_\ell^*$  ve her  $\lambda > 0$  için  $\Xi(\varpi, \xi)$  (12)' deki gibi alınırsa sağlanır.

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır.

Bu koşullar sağlanırsa,  $\Gamma S_\ell^*$  de bir sabit noktaya sahiptir (Öztürk, 2022).

Eğer her  $p \in [0, \infty)$  için  $\mathcal{G}(p, q) = kp, k \in (0, 1)$  seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 6.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile bir  $\ell$ -tam Mod-b-Met-U ve  $\Gamma: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümü verilsin. Aşağıdakiler sağlanır:

(i)  $\Sigma \in \Omega$  ve  $k \in (0,1)$  vardır öyle ki,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)) \leq k\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)),$$

eşitsizliği her  $\varpi, \xi \in S_\ell^*$  ve her  $\lambda > 0$  için  $\Xi(\varpi, \xi)$ , (12)' deki gibi alınır sağlanır.

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır.

Bu koşullar sağlanırsa,  $\Gamma S_\ell^*$  de bir sabit noktaya sahiptir (Öztürk, 2022).

#### 4.4. Graf Teori Uygulaması

$S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile bir  $\ell$ -tam Mod-b-Met-U ve  $\Lambda = \{(\varpi, \varpi) : \varpi \in S_\ell^*\}$  kümesi  $S_\ell^* \times S_\ell^*$  Kartezyen çarpım kümesi üzerinde verilsin. Ayrıca  $H$  yönlü grafi aşağıdaki gibi verilsin:

- $V(H) : S_\ell^*$  üzerindeki köşeleri,
- $B(H) :$  döngüleri de içeren kenarlar;  $\Lambda \subseteq B(H)$  olsun.

$(V(H), B(H))$  ikilisi  $H$  grafini tanımlar. Sıradaki

$$B(H^{-1}) = \{(\varpi, \xi) \in S_\ell^* \times S_\ell^* \mid (\xi, \varpi) \in B(H)\}$$

kümesi ise  $H$  grafinin kenar ve köşelerinin yönlerinin değiştirilmesiyle elde edilen  $H$  'ın dönüşümünü yani  $H^{-1}$  yapısını verir.  $H$  yönlendirilmemiş graf olursa  $\tilde{H}$  ile gösterilir, ki burada kenarlar bir yöne sahip değildir, aşağıdaki gibi gösterilir:

$$B(\tilde{H}) = B(H) \cup B(H^{-1})$$

$K$  grafına  $V(K) \subseteq V(H)$  ve  $B(K) \subseteq B(H)$  koşullarını sağlıyorsa  $H$  grafinin alt grafi denir. Eğer  $\varpi$  ve  $\xi$   $H$  grafinin köşeleri olmak üzere,  $\varpi$  ve  $\xi$  arasındaki mesafenin uzunluğu  $j \in \mathbb{N}$  ile gösterilirse  $(\varpi_j)$  dizisi,  $j + 1$  köşesinden sonra  $\varpi = \varpi_0, \varpi_1, \dots, \varpi_j$  ve her  $i = 1, \dots, j$  için  $(\varpi_{i-1}, \varpi_i) \in B(H)$  elde edilir (Öztürk, 2022).

Arıca  $H$  grafında herhangi iki köşe bağlantılıysa buna "bağlantılı graf" denir. Dahası  $H$ ,  $\tilde{H}$  ile bağlantılı ise "zayıf bağlantılı graf" olur. Graf teori hakkında daha fazla araştırma yapmak için şu kaynaklar kullanılabilir: (Aydi vd. 2018; Gopal vd. 2015).

**Tanım 33.**  $\Gamma: S \rightarrow S$  dönüşümü  $(S, m)$  metrik uzayı üzerinde verilsin. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i) Her  $\varpi, \xi \in S$ , için  $(\varpi, \xi) \in B(H) \Rightarrow (\Gamma\varpi, \Gamma\xi) \in B(H)$  olur,
- (ii) Her  $(\varpi, \xi) \in B(H)$  ve  $\mu \in (0,1)$  için  $m(\Gamma\varpi, \Gamma\xi) \leq \mu m(\varpi, \xi)$  olur.

O halde,  $\Gamma$  dönüşümüne  $S$  üzerinde Banach  $H$ -büzülmesi denir.

$S_\rho^*$   $H$  grafı ile Mod-b-Met-U ve  $\Gamma: S_\rho^* \rightarrow S_\rho^*$  verilsin.

$$S_\rho^{*\Gamma} = \{\varpi \in S_\rho^* \mid (\varpi, \Gamma\varpi) \in B(H)\}$$

kümesi yardımıyla  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -graf büzülmesi tanımlanmıştır (Öztürk, 2022).

**Tanım 34.**  $S_\rho^*$ ,  $H$  grafı ile Mod-b-Met-U verilsin. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i)  $\Gamma$   $H$  kenarlarını korur, yani, her  $\varpi, \xi \in S_\rho^*$  için,

$$(\varpi, \xi) \in B(H) \Rightarrow (\Gamma\varpi, \Gamma\xi) \in B(H)$$

sağlanır.

- (ii)  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ ,  $\Sigma \in \Omega$  ve  $\vartheta \in \Pi$  vardır öyle ki,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi))) \quad (63)$$

eşitsizliği her  $\varpi, \xi \in B(H)$  ve her  $\lambda > 0$  için aşağıdaki koşulla sağlanır:

$$\Xi(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\varpi, \xi) + |\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) - \ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi)|; \\ \ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) + |\ell_\lambda(\varpi, \xi) - \ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi)|; \\ \ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi) + |\ell_\lambda(\varpi, \xi) - \ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\varpi, \Gamma\xi) + \ell_{2\lambda}(\xi, \Gamma\varpi)}{\kappa} + |\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) - \ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi)| \right] \end{array} \right\}$$

O halde,  $\Gamma$  dönüşümüne  $S_\ell^*$  üzerinde  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -graf büzülmesi denir (Öztürk, 2022).

**Teorem 15.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\ell$ -tam  $H$  grafi ile Mod-b-Met-U ve  $\Gamma: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümü verilsin. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i)  $\varpi_0 \in S_\ell^{*\Gamma}$  vardır,
- (ii)  $\Gamma$  dönüşümü  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$  – graf büzülmesidir.
- (iii) Eğer  $\{\varpi_k\}$  dizisi  $S_\ell^*$  uzayında  $\lim_{k \rightarrow \infty} \ell_\lambda(\varpi_k, \varpi^*) = 0$  ve  $(\varpi_k, \varpi_{k+1}) \in B(H)$  koşullarını sağlayan bir dizi ise  $\{\varpi_{k_s}\}$  alt dizisi  $\{\varpi_k\}$  için vardır öyle ki;  $(\varpi_{k_s}, \varpi^*) \in B(H)$  olur,
- (iv)  $H$  zayıf bağlantılı graftır.

O halde  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır, yani  $\Gamma S_\ell^*$  uzayında bir sabit noktaya sahiptir (Öztürk, 2022).

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\Gamma\varpi, Y\xi)}{c}} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi))) \quad (64)$$

Burada her  $\varpi, \xi \in S_\ell^*$ ,  $c, l \in \mathbb{R}^+$ ,  $c > l$  ve her  $\lambda > 0$  için,

$$\Xi(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho}{\kappa} \right] + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho \right| \end{array} \right\}$$

**İspat:**  $\{\varpi_k\}$   $S_\ell^*$  uzayında  $k \in \mathbb{N}$  için  $\varpi_{k+1} = \Gamma\varpi_k$  ile verilen bir dizi olsun. (i)'den,  $\varpi_0 \in S_\ell^{*\Gamma}$  olur; buradan  $(\varpi_0, \Gamma\varpi_0) \in B(H)$  bulunur. Eğer  $\bar{\omega}_1 = \Gamma\bar{\omega}_0$  alınırsa,

$$(\varpi_0, \Gamma\varpi_0) = (\varpi_0, \varpi_1) \in B(G)$$

$\Gamma, H$ 'nin kenarlarını koruduğu için aşağıdaki ifade sağlanır:

$$(\varpi_0, \varpi_1) \in B(H) \Rightarrow (\Gamma\varpi_0, \Gamma\varpi_1) \in B(H).$$

Bu şekilde devam edilirse,

$$(\varpi_k, \varpi_{k+1}) \in B(H)$$

Sonuç 6,  $\{\varpi_k\} S_\ell^*$  uzayında  $\ell$ -Cauchy dizisidir.  $S_\ell^*$  uzayı  $\ell$ -ta uzay, en az bir  $\varpi^* \in S_\ell^*$  için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ell_\lambda(\varpi_k, \varpi^*) = 0 \quad (65)$$

sağlanır.  $\varpi^*$  noktasının  $\Gamma$  için sabit nokta olduğu gösterilecektir. (iii)' den,  $(\varpi_{k_s}, \varpi^*) \in B(H)$  elde edilir. (10) 'dan,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi_{k_s}, \Gamma\varpi^*)) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma(B(\varpi_{k_s}, \varpi^*)), \vartheta(B(\varpi_{k_s}, \varpi^*))\right) \quad (66)$$

burada

$$\begin{aligned} \Xi(\varpi_{k_s}, \varpi^*) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi^*) + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \Gamma\varpi_{k_s}) - \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)|; \\ \ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \Gamma\varpi_{k_s}) + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi^*) - \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)| \\ \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*) + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi^*) - \ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \Gamma\varpi_{k_s})| \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\varpi_{k_s}, \Gamma\varpi^*) + \ell_{2\lambda}(\varpi^*, \Gamma\varpi_{k_s})}{\kappa} + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \Gamma\varpi_{k_s}) - \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)| \right] \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi^*) + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi_{k_s-1}) - \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)|; \\ \ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi_{k_s-1}) + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi^*) - \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)|; \\ \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*) + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi^*) - \ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi_{k_s-1})|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\varpi_{k_s}, \Gamma\varpi^*) + \ell_{2\lambda}(\varpi^*, \varpi_{k_s-1})}{\kappa} + |\ell_\lambda(\varpi_{k_s}, \varpi_{k_s-1}) - \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)| \right] \end{array} \right\}, \quad (67) \end{aligned}$$

(65) ve (66) denklemlerinde  $s \rightarrow \infty$  iken limit alınırsa (64) ve  $(G_1)$  denklemlerini kullanılarak, şu sonuca varılır:

$$\begin{aligned}\Sigma(\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)) &\leq \Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma(\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)), \vartheta(\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*))\right) \\ &\leq \Sigma(\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*))\end{aligned}$$

ve sonuç olarak, sonraki terim bulunur:

$$\mathcal{G}\left(\Sigma(\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)), \vartheta(\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*))\right) = \Sigma(\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)).$$

$\mathcal{G}$  özelliği kullanılarak,  $\varpi^* = \Gamma\varpi^*$  olduğundan  $\varpi^*$ ,  $\Gamma$  dönüşümün sabit noktasıdır. Şimdi  $\varpi^*$   $\Gamma$ 'ün sabit noktası olduğu gösterilecektir.  $w$ ,  $\Gamma$ 'nin başka bir sabit noktası olsun, yani,  $w = \Gamma w$ , en az bir  $r \in S_\rho^*$  vardır öyle ki  $(\varpi^*, r) \in B(H)$  ve  $(r, w) \in B(H)$  sağlanır. (iv) özelliğinden,  $(\varpi^*, w) \in B(H)$  bulunur.

(64)' ten,

$$\Sigma(\kappa^3 \ell_\lambda(\Gamma\varpi^*, \Gamma w)) \leq \mathcal{G}\left(\Sigma(\Xi(\varpi^*, w)), \vartheta(\Xi(\varpi^*, w))\right) \quad (68)$$

olur. Burada

$$\Xi(\varpi^*, w) = \max \left\{ \begin{array}{l} \ell_\lambda(\varpi^*, w) + |\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*) - \ell_\lambda(w, \Gamma w)|; \\ \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*) + |\ell_\lambda(\varpi^*, w) - \ell_\lambda(w, \Gamma w)| \ell_\lambda(w, \Gamma w) + \\ |\ell_\lambda(\varpi^*, w) - \ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*)|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\ell_{2\lambda}(\varpi^*, \Gamma w) + \ell_{2\lambda}(w, \Gamma\varpi^*)}{\kappa} + |\ell_\lambda(\varpi^*, \Gamma\varpi^*) - \ell_\lambda(w, \Gamma w)| \right] \end{array} \right\} \quad (69)$$

olarak alınmıştır.

(66) ve (67) ile birlikte  $\mathcal{G}, \Sigma, \vartheta$  fonksiyonlarının özellikleri de kullanılarak,  $\varpi^* = w$  sonucu elde edilir, yani  $\varpi^*$ ,  $\Gamma$ 'nin tek sabit noktasıdır (Öztürk, 2022).

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

### 5.1. İntegral Tip Büzülmelerde Uygulaması

Bu bölüm, ana sonuçtaki özel ifadelerin uygulanmasıyla elde edilebilen, integral tipli büzülme ve bazı sonuçları da içeren ortak sabit nokta teoreminden oluşmaktadır.

**Tanım 35.**  $\Theta := \{\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \mu \text{ Lebesgue integrallenebilir dönüşüm sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlar:}$

( $\mu_1$ )  $\mu$  negatif olmayan toplanabilir fonksiyon;

( $\mu_2$ ) Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\int_0^\varepsilon \mu(\rho) d\rho > 0$$

Aşağıda, Branciari (2002) integral tipte bir büzülme koşulları ile ilgili sabit nokta teoremini gösterdi.

**Teorem 16.**  $\Gamma (S, m)$  tam metrik uzayda üzerine bir dönüşüm olsun ve en az bir  $k \in (0,1)$  ve  $\mu \in \Theta$  ve  $\varpi, \xi \in S$  için,

$$\int_0^{m(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)} \mu(\rho) d\rho \leq k \int_0^{m(\varpi, \xi)} \mu(\rho) d\rho$$

sağlanır yani,  $\Gamma$  dönüşümü  $(S, m)$  uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir (Branciari, 2002).

Branciari'nin bilinen bazı özellikleri ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Azadifar vd. (2013), modüler metrik uzaylarda integral tipinde genel sabit nokta teoremlerinin hangi özellikleri sağlaması gerektiğini araştırmıştır.

Şimdi, aşağıda gösterildiği gibi, integral tip  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -büzülmesi tanımlanarak bu bölümün ana sonucunu oluşturulacaktır.

**Tanım 36.**  $S_\ell^*$ ,  $\kappa \geq 1$  ile Mod-b-Met-U ve  $\Gamma, Y, J, \zeta: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümleri verilsin.  $\Gamma, Y, J$  ve  $\zeta$  dönüşümlerine her  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}, \Sigma \in \Omega, \vartheta \in \Pi$  ve  $\mu \in \Theta$  için aşağıdaki büzülme sağlanıyorsa buna  $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -integral tipi büzülme denir (Öztürk, 2022):

$$\Xi(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ & \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ & \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, J\xi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ & \frac{1}{2} \left[ \frac{\int_0^\ell e_{\frac{\lambda}{T}(\zeta\varpi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\ell_{2\lambda}} \int_0^{(J\xi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho}{\kappa} + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\zeta\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(J\xi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho \right| \right] \end{aligned} \right\}$$

İçin

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\ell_\lambda(\Gamma\varpi, Y\xi)} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi)))$$

**Teorem 17.**  $S_\ell^*$ ,  $\kappa \geq 1$  ile  $\ell$ -tam Mod-b-Met-U olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i)  $\Gamma, Y, J$  ve  $\zeta$   $\mathcal{G}(\Sigma, \vartheta, \Xi)$ -büzülmeleri  $\Gamma(S_\ell^*) \subset J(S_\ell^*)$  ve  $Y(S_\ell^*) \subset \zeta(S_\ell^*)$  sağlar,
- (ii)  $\Gamma(S_\ell^*), J(S_\ell^*), Y(S_\ell^*)$  ve  $\zeta(S_\ell^*)$  kümeleri  $S_\ell^*$ 'nin kapalı bir alt kümesi,
- (iii)  $\{J, Y\}$  ve  $\{\zeta, \Gamma\}$  çifti zayıf uyumlu,

$(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları ile,  $\Gamma, Y, J$  ve  $\zeta$  dönüşümleri  $S_\ell^*$  uzayında ortak tek bir sabit nokta verir (Öztürk, 2022).

**İspat:**  $\varpi_0 \in S_\ell^*$  herhangi bir nokta ve Teorem 17' nin ispatından,  $\{\xi_q\}$  dizisi  $S_\ell^*$  uzayında alınır;

$$\xi_{2q} = \Gamma\varpi_{2q} = J\varpi_{2q+1}, \xi_{2q+1} = Y\varpi_{2q+1} = \zeta\varpi_{2q+2}$$

(10) dan

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\Gamma\varpi_{2q}, \Upsilon\varpi_{2q+1})}{\bar{c}}} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \right), \vartheta \left( \Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) \right) \right),$$

Bu durum aşağıdaki koşulla sağlanır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{\int_0^{\ell_{2\lambda}} (\zeta\varpi_{2q}, \Upsilon\varpi_{2q+1}) \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\ell_{2\lambda}} (J\varpi_{2q+1}, \Gamma\varpi_{2q})}{\kappa} \right. \\ & \left. + \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\zeta\omega_{2q}, \Gamma\omega_{2q})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho \int_0^{\ell_\lambda(J\omega_{2q+1}, \Upsilon\varpi_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho \right| \right] \\ = \max & \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho \right| \\ \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q})}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \left| \frac{1}{2} \left[ \frac{\int_0^{\ell_{2\lambda}} (\xi_{2q-1}, \xi_{2q+1})}{\mu(\rho) d\rho + \int_0^{\ell_{2\lambda}} (\xi_{2q}, \xi_{2q})} \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\ell_\lambda(\xi_{2q-1}, \xi_{2q})} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho \right] \right| \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Şimdi  $\sigma_q = \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q)}{\bar{c}}} \mu(\rho) d\rho$  ve  $\sigma_q^* = \int_0^{\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q)} \mu(\rho) d\rho$  olduğunu  $c > l$  için kabul edilsin ve  $\sigma_{2q+1}^* \geq \sigma_{2q}^*$  verilsin. Yine benzer şekilde Teorem 17 ispatı ve  $(\mathcal{G}_1)$  den;

$$\Sigma(\sigma_{2q+1}^*) \leq \Sigma(\sigma_{2q+1}) \leq \Sigma(\kappa^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G} \left( \Sigma(\sigma_{2q+1}^*), \vartheta(\sigma_{2q+1}^*) \right) \leq \Sigma(\sigma_{2q+1}^*).$$

$\mathcal{G}$  nin özelliklerinden çelişki elde ederiz.  $\sigma_{2q+1}^* < \sigma_{2q}^*$  olduğundan da  $\Xi(\varpi_{2q}, \varpi_{2q+1}) = 2\sigma_{2q}^* - \sigma_{2q+1}^*$  elde edilir. Ayrıca benzer şekilde  $\sigma_{2q}^* < \sigma_{2q-1}^*$  olur ki bu da  $\sigma_{q+1}^* < \sigma_q^*$  ile aşağıdaki sonucu elde etmemizi sağlar:

$$\sigma_q^* = \left\{ \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q)}{\bar{t}}} \mu(\rho) d\rho \right\}$$

negatif olmayan gerçek sayılardan oluşan artmayan bir dizidir ve bu nedenle aşağıdaki dizi

$$\left\{ \int_0^{\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q)} \mu(\rho) d\rho \right\}$$

negatif olmayan bir  $r$  sayısına yakınsar.  $r = 0$  olduğu kanıtlanır. Aynı sonuçlarla şu sonuca varılır:

$$\Sigma(\sigma_{2q+1}) \leq \Sigma(\kappa^3 \sigma_{2q+1}) \leq \mathcal{G}(\Sigma(2\sigma_{2q}^* - \sigma_{2q+1}^*), \vartheta(2\sigma_{2q}^* - \sigma_{2q+1}^*)) \leq \Sigma(2\sigma_{2q}^* - \sigma_{2q+1}^*)$$

Eğer limit alınırsa,

$$\Sigma(r) \leq \mathcal{G}(\Sigma(r), \vartheta(r)) \leq \Sigma(r)$$

ve sonuç olarak,  $\mathcal{G}(\Sigma(r), \vartheta(r)) = \Sigma(r)$ . ( $\mathcal{G}_2$ ) özelliğinden  $\Sigma(r) = 0$  ve  $\vartheta(r) = 0$  sağlanır.

Burada  $r = 0$ , ise,  $\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q)$  sağlanır.

$\int_0 \mu(\rho) d\rho \rightarrow 0$ , iken  $q \rightarrow \infty$ . Buradan,

$$\ell_\lambda(\xi_{q-1}, \xi_q) \rightarrow 0, (q \rightarrow \infty)$$

olur. Bir sonraki adımda,  $\{\xi_q\}$  dizisinin bir  $\ell$ -Cauchy dizisi olduğunu gösterilecektir.  $\{\xi_{2q}\}$  dizisinin  $\ell$ -Cauchy dizisi olması yeterlidir. Eğer değilse, öyle bir  $\varepsilon > 0$  bulunur ki,  $\{a_i\}$  ve  $\{b_i\}$  dizilerinin varlığı  $b_i > a_i \geq i$  durumunu sağlayan en küçük indeks olduğu pozitif tam sayılardan oluşan  $b_i$  değerleri için,

Her her  $\lambda > 0$  için  $\ell_{\frac{\lambda}{T}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i}) \geq \varepsilon$ , ve  $\ell_{\frac{\lambda}{T}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_{i-2}}) < \varepsilon$  elde edilir,

burada  $\varepsilon \leq \ell_{\frac{\lambda}{i}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i}) \leq \ell_{\frac{\lambda}{c}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_i})$  ve Teorem 17 ispatına devam edersek,

$$\begin{aligned}
\Sigma \left( \int_0^{\ell_{\frac{\lambda}{c}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_{i+1}})} \mu(\rho) d\rho \right) &\leq \Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\ell_{\frac{\lambda}{c}}(\xi_{2a_i}, \xi_{2b_{i+1}})} \mu(\rho) d\rho \right) \\
&\leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\frac{\lambda}{T}}(\xi_{2a_{i-1}}, \xi_{2b_i})} \mu(\rho) d\rho \right), \vartheta \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(\xi_{2a_{i-1}}, \xi_{2b_i})} \mu(\rho) d\rho \right) \right) \\
&\leq \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(\xi_{2a_{i-1}}, \xi_{2b_i})} \mu(\rho) d\rho \right)
\end{aligned}$$

Bununla birlikte, yukarıdaki eşitsizlik bir çelişkiye neden olur, yani,  $\{\xi_{2q}\}$  ise  $\ell$ -Cauchy dizisidir. Burada,  $\{\xi_q\}$ ,  $S_{\ell}^*$  uzayında bir  $\ell$ -Cauchy dizisidir.  $S_{\ell}^*$  uzayı  $\ell$ -tam Mod-b-Metrik olsun, bu durumda  $z \in S_{\ell}^*$  vardır öyle ki,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \xi_q = z$$

Şimdi  $\Gamma z = Yz = Jz = \zeta z = z$  olduğu ispatlanacaktır. Aslında, sadece şunu göstermek yeterlidir:  $\Gamma z = \zeta z = z$ . Ayrıca Teorem 17'ye benzer olarak,  $z$  noktasının  $Y$  ve  $J$  için genel bir sabit nokta olduğu sonucu çıkar.  $S_{\ell}^*$  uzayının kapalı bir alt kümesi  $\zeta(S_{\ell}^*)$  ise  $u \in S_{\ell}^*$  elemanı alındığında  $z = \zeta u$  sağlanır.  $\Gamma u = z$  olduğu iddia edilebilir. (10) dan,

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\ell_{\frac{\lambda}{c}}(\Gamma u, Y\bar{\omega}_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \Xi(u, \bar{\omega}_{2q+1}) \right), \vartheta \left( \Xi(u, \bar{\omega}_{2q+1}) \right) \right)$$

olur, burada

$$\Xi(u, \bar{\omega}_{2q+1}) = \max \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_0^{\ell_{\lambda}(z, \xi_{2q})} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_{\lambda}(z, \Gamma u)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho \right| ; \right. \\ \left| \int_0^{\ell_{\lambda}(z, \Gamma u)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_{\lambda}(z, \xi_{2q})} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho \right| ; \right. \\ \left| \int_0^{\ell_{\frac{\lambda}{T}}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_{\frac{\lambda}{T}}(z, \xi_{2q})} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_{\lambda}(z, \Gamma u)} \mu(\rho) d\rho \right| ; \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\int_0^{\ell_{2\lambda}(z, \xi_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho}{\int_0^{\ell_{2\lambda}(\rho) d\rho} + \int_0^{\ell_{2q, \Gamma u}} \mu(\rho) d\rho} + \left| \int_0^{\ell_{\lambda}(z, \Gamma u)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_{\lambda}(\xi_{2q}, \xi_{2q+1})} \mu(\rho) d\rho \right| \right) \right] \right\}$$

olur. Adım adım, Teorem 17 'nin ispatına benzer şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Sigma \left( \int_0^{\ell_{\overline{T}}(\Gamma u, z)} \mu(\rho) d\rho \right) &\leq \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\overline{c}}(\Gamma u, z)} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\ell_{\overline{c}}} \mu(\Gamma u, z) \right. \\
&\leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(\Gamma u, z)} \mu(\rho) d\rho \right), \vartheta \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(\Gamma u, z)} \mu(\rho) d\rho \right) \right) \\
&\leq \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(\Gamma u, z)} \mu(\rho) d\rho \right)
\end{aligned}$$

( $\mathcal{G}_2$ ) özelliğinden  $\Gamma u = \zeta u = z$  elde edilir.  $\Gamma$  ve  $\zeta$  dönüşümleri zayıf uyumlu ise,  $\Gamma z = \Gamma \zeta u = \zeta \Gamma u = \zeta z$  olduğu bulunur. Diğer adımda,  $\Gamma z = z$  olduğu gösterilebilir. Üstelik ispat yukarıdakine benzerdir. Bu nedenle  $\Gamma z = \zeta z = z$  elde edilir. Son olarak, benzersizlik için  $w$ 'nin başka bir ortak sabit nokta olduğunu, yani  $\Gamma w = \Upsilon w = Jw = \zeta w$  öyle ki  $z \neq w$  için bu durum geçerlidir. (10) dan aşağıdaki elde edilir:

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\ell_{\overline{c}}(\Gamma z, \Upsilon w)} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(z, w)), \vartheta(\Xi(z, w))),$$

ve  $\Xi(z, w) = \int_0^{\ell_{\lambda}(z, w)} \mu(\rho) d\rho$  olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\Sigma \left( \int_0^{\ell_{\overline{T}}(z, w)} \mu(\rho) d\rho \right) &\leq \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\overline{c}}(z, w)} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\ell_{\overline{c}}(z, w)} \mu(\rho) d\rho \right) \\
&\leq \mathcal{G} \left( \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(z, w)} \mu(\rho) d\rho \right), \vartheta \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(z, w)} \mu(\rho) d\rho \right) \right) \\
&\leq \Sigma \left( \int_0^{\ell_{\lambda}(z, w)} \mu(\rho) d\rho \right)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla  $\mathcal{G}$  fonksiyonunun özelliklerinden  $\Gamma, \Upsilon, J$  ve  $\zeta$  için tek ortak sabit nokta olarak  $z = w$  elde edilir (Öztürk, 2022).

Bu bölümün ana sonuçlarından bazı sonuçlar çıkarılabilir.

**Sonuç 7.**  $S_{\ell}^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile  $\ell$ -tam bir modüler b-metrik uzay ve  $\Gamma$  ve  $\Upsilon$  üzerine dönüşümleri  $S_{\ell}^*$  uzayında verilsin. Aşağıdakiler sağlanır.

(i)  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}, \Sigma \in \Omega, \vartheta \in \Pi$ , ve  $\mu \in \Theta$  için aşağıdaki koşullar sağlanır;

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\Gamma\varpi, Y\xi)}{c}} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi)))$$

olur, burada her  $\lambda > 0$  için tüm  $\varpi, \xi \in S_\ell^*, c, l \in \mathbb{R}^+, c > l$  için;

$$\Xi(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \xi)}{l}} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)}{l}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi, Y\xi)}{l}} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)}{l}} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \xi)}{l}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi, Y\xi)}{l}} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi, Y\xi)}{l}} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \xi)}{l}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)}{l}} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\int_0^{\frac{\ell_{2\lambda}(\varpi, Y\xi)}{\kappa}} \mu(\rho) d\rho + \int_0^{\frac{\ell_{2\lambda}(\xi, \Gamma\varpi)}{\kappa}} \mu(\rho) d\rho}{\kappa} + \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\bar{\omega}, \Gamma\bar{\omega})}{l}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi, Y\xi)}{l}} \mu(\rho) d\rho \right| \right] \end{array} \right\}$$

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır.

$\Gamma$  ve  $Y$  dönüşümleri,  $S_\ell^*$  için tek bir sabit noktanın varlığını kanıtlar (Öztürk, 2022).

Burada  $\Gamma = Y$  seçimi Sonuç 7 yapılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 8.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile  $\ell$ -tam bir modüler b-metrik uzay ve  $\Gamma: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümü verilsin.

Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i)  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}, \Sigma \in \Omega, \vartheta \in \Pi$  ve  $\mu \in \Theta$  vardır öyle ki;

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)}{c}} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \mathcal{G}(\Sigma(\Xi(\varpi, \xi)), \vartheta(\Xi(\varpi, \xi)))$$

burada ve her  $\lambda > 0$  için tüm  $\varpi, \xi \in S_\ell^*, c, l \in \mathbb{R}^+, c > l$  için;

$$\Xi(\varpi, \xi) = \max \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\ell_\lambda(\varpi, \xi)} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi)} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)}{\bar{T}}} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi)} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \xi)}{\bar{T}}} \mu(\rho) d\rho \right|; \\ \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi)}{\bar{T}}} \mu(\rho) d\rho + \left| \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \xi)}{\bar{T}}} \mu(\rho) d\rho - \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi)}{\bar{T}}} \mu(\rho) d\rho \right| \end{array} \right\} \quad (70)$$

elde edilir.

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır.

Bu durumda,  $\Gamma, S_\ell^*$  için tek bir sabit noktanın varlığını kanıtlar (Öztürk, 2022).

Bununla beraber, Sonuç 7 ele alındığında her  $p, q \in [0, \infty)$  için seçimi yapılırsa  $\mathcal{G}(p, q) = p - q$  olduğundan aşağıdaki durumlardan bahsedilebilir.

**Sonuç 9.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile  $\ell$ -tam bir  $MbMS$  ve  $\Gamma: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümü verilsin. Aşağıdakiler sağlansın:

(i)  $\Sigma \in \Omega, \vartheta \in \Pi$  ve  $\mu \in \Theta$  vardır öyle ki,

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)}{c}} \mu(\rho) d\rho \right) \leq \Sigma(\Xi(\varpi, \xi)) - \vartheta(\Xi(\varpi, \xi))$$

sağlanır, burada  $\Xi(\varpi, \xi)$  (11) kısmında verildiği gibidir ve her  $\lambda > 0$  için tüm  $\varpi, \xi \in S_\ell^*, c, l \in \mathbb{R}^+, c > l$  olur.

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır (Öztürk, 2022).

Bu durumda,  $\Gamma, S_\ell^*$  için tek bir sabit noktanın varlığını kanıtlar.

Eğer sıradaki yapılar kurulursa her  $p \in [0, \infty)$  için  $\mathcal{G}(p, q) = kp, k \in (0, 1)$  o halde aşağıdakilerden bahsedilebilir:

**Sonuç 10.**  $S_\ell^*$  uzayı  $\kappa \geq 1$  ile  $\ell$ -tam bir  $MbMS$  ve  $\Gamma: S_\ell^* \rightarrow S_\ell^*$  dönüşümü verilsin. Buradan aşağıdakilerin sağlandığı görülebilir:

(i) O zaman bir  $\Sigma \in \Omega$  ve  $\mu \in \Theta$  vardır öyle ki

$$\Sigma \left( \kappa^3 \int_0^{\frac{\ell_\lambda(\Gamma\varpi, \Gamma\xi)}{c}} \mu(\rho) d\rho \right) \leq k\Sigma(\Xi(\varpi, \xi))$$

burada  $\Xi(\varpi, \xi)$  (11) kısmında verildiği gibidir ve her  $\lambda > 0$  için tüm  $\varpi, \xi \in S_\ell^*, c, l \in \mathbb{R}^+, c > l$  olur.

(ii)  $(M_1)$  ve  $(M_2)$  koşulları sağlanır (Öztürk, 2022).

Bu durumda,  $\Gamma, S_\ell^*$  için tek bir sabit noktanın varlığını kanıtlar.

## 5.2. Diğer Metrik Uzaylara Genişletilmesi

Sonuç olarak, Fulga ve Proca (2017a; 2017b) ve Proca (2018; 2019) sonuçlarını dört eşleme için  $C$ -sınıfı fonksiyonlar aracılığıyla modüler  $b$ -metrik uzaya genişlettik ve sonuçlarımızın grafik yapısı ve integral tipli daralmalara uygulanabileceğini inceledik. Bu arada, sonuçlarımız şu durumda hala geçerlidir:

$$\Xi(\varpi, \xi) = \ell_\lambda(\varpi, \xi) + |\ell_\lambda(\varpi, \Gamma\varpi) - \ell_\lambda(\xi, \Gamma\xi)|.$$

Ayrıca,  $\kappa = 1$  alındığında, Mod- $b$ -Metrik için elde edilen sonuçlar modüler metrik uzay ortamında geçerlidir (Öztürk, 2022).

## KAYNAKÇA

- Abbas, M., & Khan, M. A. (2009). Common fixed point theorem of two mappings satisfying a generalized weak contractive condition. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2009, Article ID 131068, 9 pages. <https://doi.org/10.1155/2009/131068>
- Acar, Ö. (2016). *Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri ve Uygulamaları*. (Doktora tezi), Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 444330)
- Aghajani, A., Abbas, M., & Roshan, J. R. (2014). Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces. *Mathematica Slovaca*, 64(4), 941–960.
- Alqahtani, B., Fulga, A., & Karapınar, E. (2018). A short note on the common fixed points of the Geraghty contraction of type  $ES, T_{\{S, T\}}S, T$ . *Demonstratio Mathematica*, 51, 233–240. <https://doi.org/10.1515/dem-2018-0022>
- Ansari, A. H. (2014). Note on " $\phi$ - $\psi$ - contractive type mappings and related fixed point." In *The 2nd Regional Conference on Mathematics and Applications* (Vol. 11, pp. 377–380). Payame Noor University.
- Ansari, A. H., Dosenovic, T., Radenovic, S., Saleem, N., & Sesum-Cavic, V. (2019). C-class functions on some fixed point results in ordered partial metric space via admissible mappings. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 49(1), 101–116.
- Ansari, A. H., Kumar, J. M., & Saleem, N. (2020). Inverse C-class function on weak semi-compatibility and fixed point theorems for expansive mappings in G-metric spaces. *Mathematica Moravica*, 24(1), 93–108.
- Ansari, A. H., Saleem, N., Fisher, B., & Khan, M. S. (2017). C-class function on Khan type fixed point theorems in generalized metric space. *Filomat*, 31(11), 3483–3494. <https://doi.org/10.2298/FIL1711483A>
- Aouine, A. C., & Aliouche, A. (2020). Coincidence and common fixed points theorem with an application in dynamic programming. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 3, 12–28.
- Aydi, H., Felhi, A., Karapınar, E., & Sahmim, S. (2018). A Nadler-type fixed point theorem in dislocated spaces and applications. *Miskolc Mathematical Notes*, 19, 111–124. <https://doi.org/10.18514/mmn.2018.1652>

- Azadifar, B., Maramaei, M., & Sadeghi, G. (2013). On the modular G-metric spaces and fixed point theorems. *Journal of Nonlinear Science Applications*, 6, 293–304.
- Azadifar, B., Sadeghi, G., Saadati, R., & Park, C. (2013). Integral type contractions in modular metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, Article 483, 1–14. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-483>
- Bellman, R., & Lee, E. S. (1978). Functional equations arising in dynamic programming. *Aequationes Mathematicae*, 17(1), 1–18.
- Berinde, V. (2010). Approximating common fixed points of noncommuting almost contractions in metric spaces. *Fixed Point Theory*, 11(2), 179–188.
- Branciari, A. (2002). A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 29, 531–536. <https://doi.org/10.1155/S0161171202206099>
- Chaipunya, P., Cho, Y. J., & Kumam, P. (2012). Geraghty-type theorems in modular metric spaces with application to partial differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2012, Article 83, 1687–1847. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-83>
- Chandok, S., & Karapinar, E. (2013). Common fixed point of generalized rational type contraction mappings in partially ordered metric spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 11(2), 251–260.
- Chandok, S., Mukheimer, A., Hussain, A., & Paunovic, L. (2019). Picard-Jungck operator for a pair of mappings and simulation type functions. *Mathematics*, 7(5), 461. <https://doi.org/10.3390/math7050461>
- Chistyakov, V. V. (2008). Modular metric spaces generated by F-modulars. *Folia Mathematica*, 15, 3–24.
- Chistyakov, V. V. (2010). Metric modular spaces I: Basic concepts. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(1), 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.021>
- Chistyakov, V. V. (2010). Metric modular spaces II: Applications to superposition operators. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(1), 15–30. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.022>
- Chistyakov, V. V. (2010a). Modular metric spaces I: Basic concepts. *Nonlinear Analysis*, 72(1), 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.021>
- Chistyakov, V. V. (2010b). Modular metric spaces II: Application to superposition operators. *Nonlinear Analysis*, 72(1), 15–30. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.05.022>
- Chistyakov, V. V. (2012). Fixed points of modular contractive maps. *Doklady Mathematics*, 86(4), 515–518. <https://doi.org/10.1134/S1064562412040124>

- Chistyakov, V. V. (2013). Modular contractions and their application. In B. Goldengorin, V. Kalyagin, & P. Pardalos (Eds.), *Models, algorithms, and technologies for network analysis* (pp. 65–92). Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 32. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3318-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3318-9_6)
- Combettes, P., & Glaudin, L. (2021). Solving composite fixed point problems with block updates. *Advances in Nonlinear Analysis*, *10*(1), 1154–1177. <https://doi.org/10.1515/anona-2021-0104>
- Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Mathematica Universitatis Ostraviensis*, *1*(1), 5–11.
- Das, D.; Mishra, L.N.; Mishra, V.N.; Rosales, H.G.; Dhaka, A.; Monteagudo, F.E.L.; Fernández, E.G.; Ramirez-delReal, T.A. (2021).  $C^*$ -Algebra Valued Modular G-Metric Spaces with Applications in Fixed Point Theory. *Symmetry*, *13*, 2003. <https://doi.org/10.3390/sym13112003>.
- Dhage, B. C. (1992). Generalized metric space and mapping with fixed point. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, *84*(4), 329–336.
- Ege, M. E., & Alaca, C. (2018). Some results for modular b-metric spaces and an application to system of linear equations. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, *8*(1), 3–14.
- Fulga, A., & Karapınar, E. (2018). Some results on S-contractions of Type E. *Mathematics*, *195*(6), 1–9. <https://doi.org/10.3390/math19506001>
- Fulga, A., & Proca, A. M. (2017a). Fixed point for Geraghty  $\vartheta$ -E-contractions. *Journal of Nonlinear Science Applications*, *10*, 5125–5131. <https://doi.org/10.22436/jnsa.010.09.48>
- Fulga, A., & Proca, A. M. (2017b). A new generalization of Wardowski fixed point theorem in complete metric spaces. *Advances in Theory of Nonlinear Analysis and Applications*, *1*, 57–63.
- Gopal, D., Vetro, C., Abbas, M., & Patel, D. K. (2015). Some coincidence and periodic points results in a metric space endowed with a graph and applications. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, *9*, 128–140. <https://doi.org/10.15352/bjma/09-3-9>
- Hussain, S. (2019). Non-unique fixed point theorems in modular metric spaces. *Symmetry*, *11*(4), 549. <https://doi.org/10.3390/sym11040549>
- Jiddah, J. A., Shagari, M. S., & Imam, A. T. (2023). Advancements in fixed point results of generalized metric spaces: A survey. *Sohag Journal of Science*, *8*(2), 175–208.
- Jungck, G. (1996). Common fixed points for non-continuous nonself mappings on non-numeric spaces. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, *4*(2), 199–212.

- Khan, M. S., Swalesh, M., & Sessa, S. (1984). Fixed point theorems by altering distances between the points. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 30(1), 1–9. <https://doi.org/10.1017/S0004972700021583>
- Liu, Z., Li, X., Kang, S. M., & Cho, Y. J. (2011). Fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral-type and applications. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011(1), Article 64, 1687–1812. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2011-64>
- Musielak, J. (1983). *Orlicz spaces and modular spaces*. In *Lecture Notes in Mathematics* (Vol. 1034). Berlin: Springer-Verlag.
- Mustafa, Z., & Sims, B. (2006). A new approach to generalized metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 7(2), 289–297.
- Mutlu, A., Ozkan, K., & Gurdal, U. (2018). A new fixed point theorem in modular metric spaces. *International Journal of Analysis and Applications*, 16(4), 472–483.
- Nakano, H. (1950). *Modulated semi-ordered linear spaces* (Vol. 1). Tokyo: Maruzen.
- Nakano, H. (1951). *Topology of linear topological spaces* (Vol. 3). Tokyo: Maruzen.
- Okeke, G. A., & Francis, D. (2021). Fixed point theorems for Geraghty-type mappings applied to solving nonlinear Volterra-Fredholm integral equations in modular G-metric spaces. *Arab Journal of Mathematical Sciences*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1108/AJMS-10-2020-0098>
- Okeke, G. A., & Khan, S. H. (2020). Approximation of fixed point of multivalued  $\rho$ -quasi-contractive mappings in modular function spaces. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 26(1/2), 75–93.
- Okeke, G. A., & Kim, J. K. (2019). Approximation of common fixed point of three multi-valued  $\rho$ -quasinonexpansive mappings in modular function spaces. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 24(4), 651–664.
- Okeke, G. A., Bishop, S. A., & Khan, S. H. (2018). Iterative approximation of fixed point of multivalued  $\rho$ -quasinonexpansive mappings in modular function spaces with applications. *Journal of Functional Spaces*, 2018, Article ID 1785702, 9 pages. <https://doi.org/10.1155/2018/1785702>
- Okeke, G. A., Francis, D., & de la Sen, M. (2020). Some fixed point theorems for a general class of mappings in modular G-metric spaces in modular metric spaces, *Heliyon*, 6, e04785, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04785>.

- Okeke, G. A. and Francis, D., (2021). Some fixed point theorems for mappings satisfying rational inequality in modular metric spaces with applications. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 28 No. 2, 2022 pp. 203-216, DOI 10.1108/AJMS-02-2021-0037.
- Orlicz, W. (1988). *Collected papers* (Vols. I–II). Warszawa: PWN.
- Özer, Ö. and Omran, S. (2019), On the  $C^*$ -algebra valued G-metric space related with fixed point theorems, *Вестник Карагандинского университета*, DOI 10.31489/2019M2/44-50UDC 51.
- Öztürk, M. and Büyükkaya, A. (2022), On Some Fixed Point Theorems for  $G(\Sigma, \mathfrak{G}, \Xi)$ -Contractions in Modular b-Metric Spaces, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 5 (4) (2022) 210-227, doi: <https://dx.doi.org/10.33401/fujma.1107963>.
- Parvaneh, V., Hussain, N., Khorshidi, M., Mlaiki, N., & Aydi, H. (2019). Fixed point results for generalized F-contractions in modular b-metric spaces with applications. *Mathematics*, 7(10), 1–16. <https://doi.org/10.3390/math7100101>
- Proca, A. M. (2018). Fixed point theorem for  $\phi M_{MM}$ -Geraghty contraction. In *Proceedings of the Scientific Research and Education in the Air Force (AFASES2018), May 22–27, Brasov, Romania* (Vol. 1, pp. 311–316). <https://doi.org/10.19062/2247-3173.2018.20.41>
- Proca, A. M. (2019). New fixed point theorem for generalized contractions. *Bulletin of Transilvania University of Braşov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics*, 12(61), 435–442.
- Rhoades, B. E. (2003). Two fixed point theorems for mappings satisfying a general contractive condition of integral-type. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(63), 4007–4013. <https://doi.org/10.1155/S0161171203209263>
- Rus, I. A. (2003). Picard operators and applications. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 58(1), 191–219.
- Rus, I. A., Petrusel, A., & Serban, M. A. (2006). Weakly Picard operators: Equivalent definitions, applications and open problems. *Fixed Point Theory*, 7(1), 3–22.
- Saleem, N., Ansari, A. H., & Jain, M. K. (2018). Some fixed point theorems of inverse C-class function under weak semi-compatibility. *Journal of Fixed Point Theory*, 9, Article 2018. <https://doi.org/10.1007/s11784-018-0485-3>
- Sessa, S. (1982). On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations. *Publications de l'Institut Mathématique*, 32(46), 149–153.

- Singh, B., Bhatnagar, C., & Mishra, S. N. (2005). Stability of Jungck-type iterative procedures. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(19), 3035–3043. <https://doi.org/10.1155/IJMMS.2005.3035>
- Subrahmanyam, P. V. (1974). Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 8, 445–457.
- Suzuki, T. (2009). A new type of fixed point theorem in metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12), 5313–5317.
- Taş, N. (2017). *Sabit Nokta Teoremleri ve Çeşitli Uygulamaları*. (Doktora tezi), Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 482531)
- Zhao, H. Y. (2020). Pseudo almost periodic solutions for a class of differential equations with delays depending on state. *Advances in Nonlinear Analysis*, 9(1), 1251–1258. <https://doi.org/10.1515/anona-2020-0053>