T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SABİT NOKTA TEORİSİNİN GEOMETRİK YAKLAŞIMI

Tuğba ARSLAN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

TEZ JÜRİ ÜYELERİ
Doç. Dr. Serkan ATMACA
Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ
Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ERZİNCAN, 2025

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR danışmanlığında, Tuğba ARSLAN tarafından hazırlanan bu çalışma 30.06.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği (…/…) ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Serkan ATMACA	İmza:
Üye	: Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR	İmza:

Yukarıdaki Yüksek Lisans Tezi Enstitü Yönetim Kurulunun …. / …. / 20.... tarih ve …../……….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etiğe Uygunluk Sayfası

“Sabit Noktanın Geometrik Yaklaşımı” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 30/06/2025

(İmza)

Tuğba ARSLAN

ÖZET

SABİT NOKTANIN GEOMETRİK YAKLAŞIMI

Tuğba ARSLAN

Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

2025, 41 sayfa

Bu tezde Sabit Nokta Teorisi konusunda 1922'den bu yana (Banach, 1922) çalışılan teoremlerin ve büzülme-tip dönüşümlerinin Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Sabit Nokta teoremleri örnekleri yardımıyla bu çalışmada verilmiştir. Bu örnekler sabit geometrik şekiller olarak bilinen elips, çember, hiperbol gibi şekillerin bilinen tanımlarının bu uzaylarda yeni bir bakış açısı verilmesiyle gerçekleşmistir. Bu şekillerin içinde verilen metrik uzayın koşullarını sağlayan örneklerin hangi büzülme dönüşümleri yardımıyla ve hangi koşullar altında sağlandığı açıklanmıştır. S-metrik uzayı ve S_b-metrik uzayı üzerinde Proinov tipi E-büzülmesini, Jleli-Samet tipi ve (θ, α, β) tipi büzülme dönüşümlerinin genelleştirilmeleri kullanılarak ilgili koşullar verilmiş ve sırasıyla çember, elips, hiperbol, Cassini eğrisi, Apollonius eğrisi örneklerinde bu büzülmelerin yapısı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit elips, Sabit hiperbol, Sabit çember

ABSTRACT

A GEOMETRIC APPROACH TO THE FIXED POINT

Tuğba ARSLAN

Master's Thesis, Erzincan Binali Yıldırım University, Institute of Science and Technology,
Department of Mathematics
Advisor: Asst. Prof. Dr. Nesrin MANAV TATAR
2025, 41 pages

In this thesis, the theorems and contraction-type transformations studied on Fixed Point Theory since 1922 (Banach, 1922) are given in this study with the help of examples of Fixed Point Theorems in Generalized Metric Spaces. These examples were realized by giving a new perspective to the known definitions of fixed geometric shapes such as ellipse, circle and hyperbola in these spaces. In these figures, it is explained with the help of which shrinkage transformations and under what conditions the examples that meet the conditions of the given metric space are met. The relevant conditions are given by using the generalizations of Proinov type E-contraction, Jleli-Samet type and (θ,α,β) type shrinkage transformations on S-metric space and S_b-metric space, and the structure of these contractions are examined in circle, ellipse, hyperbola, Cassini curve and Apollonius curve examples, respectively.

Keywords: Fixed ellipse, Fixed hyperbola, Fixed circle

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen değerli danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sözleri ile her daim yol gösterici moral ve motivasyon kaynağım olan kardeşlerim Kübra PEKER ve Büşra GÖLCÜK AYŞEN 'e ve hayatımın her anında tez çalışmalarımda sevgi ve yardımları ile yanımda olan desteğini hiç esirgemeyen kıymetli eşim Bekir ARSLAN 'a çok teşekkür ederim.

Tuğba ARSLAN
Haziran, 2025

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(X,S)	S –metrik uzay
(X,d)	Metrik Uzay
$C^{S}_{x_{0},r}$	S −metrik uzaylarda çember
$C_{x_{0},r}$	Metrik uzaylarda çember
$\{x_n\}$	Dizi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$Fix(T)$	T operatörüne ait tüm noktaların kümesi
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
d	Metrik gösterim

1. GİRİŞ

Sabit nokta çalışmaları hem matematikçiler hem de uygulamalı bilimler üzerine çalışanlar için çok önemli olmuştur. Yani sadece matematik alanında değil fizik, biyoloji bilgisayar bilimleri, mühendislik gibi birçok alanda da sabit nokta teorisi kullanılır.

X boş olmayan bir küme olmak üzere $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x \epsilon X$ sabit noktasının olabilmesi için $T(x) = x$ koşulunu sağlayan x noktasına sabit nokta denir.

Matematiğin farklı dallarında, farklı uzaylar üzerinde sabit noktaların varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Geometri dalı da bunlardan bir tanesi olmuştur. Örneğin sabit çember, sabit hiperbol, sabit elips, sabit Cassine eğrisi vb. Sabit Nokta teorisinden yararlanılmıştır.

Tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremi ilk kez 1922 yılında Stefan Banach tarafından büzülme dönüşümü kavramı ile çalışılmıştır. Banach Büzülme Prensibi adını alan teorem bir dönüşümün sabit noktasının varlığını ve tekliğini garanti eder. Bu teoremin ifadesi şöyledir: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü olmak üzere her $x, y \epsilon X$ için $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde bir $k \epsilon [0,1)$ varsa T dönüşümünün X'de bir tek sabit noktası vardır.

Fakat bazı fonksiyonlarda iki tane yani birden fazla sabit nokta çıkmıştır. Örneğin: $T: [0,1] \to [0,1]$ tanımlanmış bir dönüşüm $Tx = x^2$ fonksiyonundaki sabit noktalar $x = 0$ ve $x = 1$ olmak üzere iki tanedir sabit noktanın birden fazla çıkması geometrik çalışma yapmaya iten neden olmuştur.Bu çalışmada ise sabit nokta teorisindeki büzülme durumu genelleştirilerek b-metrik uzay S-metrik uzay yardımıyla bir S_b-metrik uzayı tanımlanmıştır.
Matematikte hala gelişmekte olan bir dal, fonksiyonel analiz ve topoloji ile bağlantılı olan sabit nokta teorisidir. Hızla genişleyen doğrusal olmayan operatörler ve doğrusal olmayan analiz alanları büyük ölçüde sabit nokta teorisine dayanır. Bu bilim dalı hala oldukça yenidir, ancak hızla büyümektedir. Sabit nokta teoremleri ve sabit noktaları, topoloji, diferansiyel denklemler, ekonomi, oyun teorisi, optimal kontrol, dinamik ve fonksiyonel analiz gibi çok sayıda alanda tarihsel olarak temel teorik araçlar olmuştur. Sabit nokta yöntemleri, sabit noktaları hesaplamak için etkili yöntemler ve kavramın uygulamalar için önemini büyük ölçüde artıran doğruluğun gelişmesi sonucunda uygulamalı matematiğin cephaneliğinde önemli bir araç haline gelmiştir.

Genel topoloji, küme teorisi, fonksiyonel analiz ve cebirsel topoloji gibi matematiğin önemli alanları, sabit nokta teoremleri için ideal bağlamlar sağlayanlardan sadece birkaçıdır. Sabit nokta teoremleri, potansiyel teorisi, yaklaşım teorisi, matematiksel ekonomi, oyun teorisi, diferansiyel denklemler teorisi ve diğerleri dahil olmak üzere çeşitli disiplinlerde bu alanlardaki sorunları yanıtlamak için kullanılır. Birisi integral, diferansiyel veya fonksiyonel denklemler sistemi konusunda, sabit nokta teoremlerini kullanarak mühendislik ve bilimden çeşitli sorunları analiz etmek mümkündür.

Nokta metodolojileri, kontrol sistemleri ve elastikiyet endişeleriyle uğraşırken, bu yaklaşım oldukça faydalıdır. Younis ve diğerleri 2022'de çok aşamalı bir işlemle ilgili dinamik bir programlama problemini temsil eden bir fonksiyonel denklemi çözdüler ve bir roketin yükselen hareketini gösteren doğrusal olmayan bir modeli çözdüler. Elastik kiriş deformasyonu modeliyle başa çıkmak için grafiksel daralmalarını kullandılar ve esas olarak mühendislik zorluklarıyla ilişkili çeşitli modeller için çözümlerin varlığına ilişkin çağdaş uygulamalara odaklandılar. Kimyasal reaksiyonlar, sabit durum sıcaklık dağılımları, salgınlar, ekonomik teoriler, Nötron taşıma teorileri ve akışkan akışı gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkan fenomenleri temsil eden çeşitli matematiksel modellerin (varyasyonel eşitsizlikler, integral, kısmi ve diferansiyel denklemler vb.) çözümlerini göstermek için sabit nokta teoremleri mevcut en önemli araçlardan biridir. Ayrıca, bu sistemler için uygun merkezi seçmenin ne kadar zor olduğunu incelemek için de kullanılırlar.

Poincare'yi takiben, başlangıçta Banach tarafından kurulan metrik sabit nokta teorisi, metrik uzaylarda (MS) hem doğrusal hem de doğrusal olmayan ifadeleri kapsayacak şekilde önemli ölçüde genişledi. 1968'de Kannan, Banach tarafından kullanılan tek terimli $d\,(x, y)$ yerine $d\,(x, Tx), d\,(y, Ty)$ terimlerini kullandı; bunun üzerine Chatterjea teoriyi genişletmek için $d\,(x, Tx), d\,(y, Ty)$ terimlerini kullandı. Yine Riech, Banach ve Kannan tarafından kullanılan üç terimi birleştirerek büzülmeyi tanımladı. Daha sonra 2023'te Alam ve arkadaşları teoriyi genelleştirmek için yardımcı fonksiyonları kullanarak rasyonel daralmaları tanımladı. Metrik uzayın daha da genişletilmesi olarak Sedghi ve arkadaşları, S-metrik uzayı sundu. S-metrik uzayın G-metrik uzayın bir uzantısı olduğu iddiası da onlar tarafından yapılmıştır. Birkaç araştırmacıya göre bu iddia yanlıştır. Ek olarak, S-metrik ve G-metrik sınıflarının her ikisinin de farklı olduğu iddia edilmektedir. b-metrik uzayın yeni bir kavramı ilk olarak Bakhtin tarafından geliştirilmiştir. Czerwick, Bakhtin kavramından önemli ölçüde yararlanmıştır.

S-metrik ve b-metrik fikirlerini birleştirerek, Souayah ve Mlaiki S-metrik uzay fikrini oluşturmuştur. S_b-metrik uzayın daha geniş bir tanımı Rohen ve diğerleri tarafından sağlanmıştır. Araştırma yayınları S_b-metrik uzay hakkında ek bulgular sunmaktadır. Elbette, tüm bu fikirleri kısa bir genel bakışta ele almak imkânsızdır. Bu çalışmada, metrik kavramının en ilginç genellemelerinden biri olan S_b-metrik yapıdaki sabit nokta teorisinin genellemelerini özetlemekle sınırlıyız. S_b-metrik tanımını açıklamadan önce, öz-kontrol için S-metrik ve b-metrik terimlerini hatırlayalım.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE İLE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Bu tez çalışmasında temel kavramlar tanımlar verilecek ve bu kavramlar bazı örnekler ile desteklenecektir.

2.1. Metrik Uzaylar

2.1.1. Metrik uzay

Tanım 2.1.1
$X \neq \phi$ bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için,
M1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
M2) $d(x, y) = d(y, x)$
M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)
Aksiyomlarını sağlıyorsa d fonksiyonu X üzerinde bir metrik (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir.

2.1.2. *b*- metrik uzay

Tanım 2.1.2
X boş olmayan bir küme olsun, $b \geq 1$ belirli bir reel sayı olsun ve
$d: X \times X \to [0, \infty)$ $\forall\, x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon
(b_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(b_2) $d(x, y) = d(y, x)$
(b_3) $d(x, z) \leq b[d(x, y) + d(y, z)]$
Bu durumda d fonksiyonu X üzerinde bir $b-$metrik olarak adlandırılır. (X, d) çiftine ise ***b*- metrik uzay** denir (Bakhtin, 1989).

2.1.3. *S*-metrik uzayı

Tanım 2.1.3
X boş olmayan bir küme olsun,
$S: X \times X \times X \to [0, \infty)$ $\forall\, q, w, t, a \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon

(S_1) $S(q,w,t) = 0 \Leftrightarrow q = w = t$

(S_2) $S(q,w,t) \leq S(q,q,a) + S(w,w,a) + S(t,t,a)$

Bu durumda S'ye X üzerinde bir S-metrik denir ve (X,S) çiftine de bir ***S*-metrik uzayı** denir (Sedghi vd., 2012).

Lemma 2.1.1

(X,S)'nin bir S-metrik uzay olduğunu varsayalım. O zaman

$$S(q,q,w) = S(w,w,q) \tag{2.1.3}$$

Eşitlik (2.1.3) bir S-metrik uzay üzerinde bir simetri özelliği olarak düşünülebilir (Sedghi vd., 2012).

Tanım 2.1.4

(X,S) bir S-metrik uzay olsun.

1. X' de ki bir $\{q_n\}$ dizisi q'ya yakınsar ancak ve ancak $n \to \infty$ iken $S(q_n,q_n,q) \to 0$ yani $\forall n \geq n_0$, $\forall \varepsilon > 0$ için $\mathrm{S}(q_n,q_n,q) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ vardır. Bunu aşağıdaki gibi gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty} q_n = q \text{ veya } \lim_{n\to\infty} S(q_n,q_n,q) = 0$$

2. X'deki $\{q_n\}$ bir dizisi, $n,d \to \infty$ iken $S(q_n,q_n,q_d) \to 0$ ise Cauchy dizisi olarak adlandırılır. Yani, $\forall n,d \geq n_0$ için, $\forall \varepsilon > 0$ için $\mathrm{S}(q_n,q_n,q) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır.

3. Her Cauchy dizisi yakınsak ise S-metrik uzay (X,S) tam uzay olarak adlandırılır (Sedghi vd., 2012).

Aşağıda, bir metrik ile bir S-metrik arasındaki ilişkiyi görüyoruz.

Lemma 2.1.2

(X,ρ) bir metrik uzay olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır (Hieu vd., 2015):

1. $S_\rho(q,w,t) = \rho(q,t) + \rho(w,t)$ her $q,w,t \in X$ için Y üzerinde bir S-metriktir.
2. $(X,\rho)'$de $q_n \to q \Leftrightarrow (X,S_\rho)'$de $q_n \to q$ olur.
3. $\{q_n\}$ (X,ρ)'de Cauchy'dir $\Leftrightarrow$ $\{q_n\}$ $(Y,S_\rho)''$de Cauchy'dir.
4. (X,ρ) tamdır $\Leftrightarrow$ (X,S_ρ) tamdır.

S_ρ, ρ metriği tarafından üretilen S-metrik olarak adlandırılır. Literatürde, (Hieu & Dung, 2015, Özgür & Taş, 2017) herhangi bir metrik tarafından üretilmeyen bazı S-metrik örnekleri vardır.

Son zamanlarda, yukarıdaki tanımları ve Lemma 2.1.3 kullanılarak, S-metrik uzayda farklı tekniklerle bazı sabit nokta sonuçları verilmiştir.

Lemma 2.1.3

(Y, S) bir S-metrik uzayı ve $\{q_n\}$ Y içerisinde Cauchy olmayan bir dizi olsun ve

$$\lim_{n\to\infty} S(q_n, q_n, q_{n+1}) = 0$$

O zaman $\{q_n\}$ ve $e > 0$ için $\{q_{n_k}\}$ ve $\{q_{v_k}\}$ adlı iki alt dizisi vardır; öyle ki

$$\lim_{k\to\infty} S\left(q_{n_{k+1}}, q_{n_{k+1}}, q_{v_{k+1}}\right) = \lim_{k\to\infty} S\left(q_{n_k}, q_{n_k}, q_{v_k}\right) \tag{6.2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} S\left(q_{n_{k+1}}, q_{n_{k+1}}, q_{v_k}\right) \tag{6.3}$$

$$= \lim_{k\to\infty} S\left(q_{n_{k+1}}, q_{n_{k+1}}, q_{v_{k+1}}\right) = e$$

$N : Y \to Y$ bir dönüşümü ve $\theta : Y \times Y \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanıyorsa N, üçgen θ −orbital geçişli (kısaca, θ-ü.o.g.) olarak adlandırılır (Popescu vd., 2014):

(o) Herhangi bir $q \in Y$ için $\theta(q, Nq) \geq 1 \Rightarrow \theta(Nq, N^2q) \geq 1,$

(t_o) Herhangi bir $q, w \in Y$ için $\theta(q, w) \geq 1$ ve $\theta(w, Nw) \geq 1 \Rightarrow \theta(q, Nw) \geq 1$

Lemma 2.1.4

$Y \neq \emptyset$ ve $\{q_v\}$, N'nin bir θ-ü.o.g olduğu herhangi bir $v \in N$ için Y üzerinde

$$q_v = Nq_{v-1}$$

olan bir dizi olsun. $\theta(q_0, Nq_0) \geq 1$ olacak şekilde Y üzerinde $q_0 \epsilon Y$ varsa, o zaman Her $n, v \in N$ için $\theta(q_n, q_v) \geq$ 1'dir (Popescu vd., 2014).

2.1.4. S_b-metrik uzay

Tanım 2.1.5

X boş olmayan bir küme olsun, $b \geq 1$ herhangi bir reel sayı olsun. Bir $S_b: X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonunun S_b-metrik olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul olduğu $\forall\ x, y, z, a \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlamasıdır.

(S_1) $S_b(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

(S_2) $S_b(x, y, z) \leq b[S_b(x, x, a) + S_b(y, y, a) + S_b(z, z, a)]$

Bu durumda (X, S_b) çiftine de $\boldsymbol{S_b}$ **-metrik uzayı** denir.

Bir S_b -metrik uzayı aynı zamanda S-metrik uzayının bir genellemesidir çünkü her S-metriği $b = 1$ olan bir S_b-metriğidir. Ancak bu ifadenin tersi aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi her zaman doğru değildir (Sedghi vd., 2016).

Örnek 2.1.1

$X = \mathbb{R}$ olsun ve S_b fonksiyonu $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

$$S_b(x, y, z) = S(x, y, z)^2 = \frac{1}{16}(|x - y| + |y - z| + |x - z|)^2$$

şeklinde olsun. S_b, $b = 4$ için bir S_b-metrik olur. Fakat S-metrik değildir. Çünkü Tanım 2.1.4 de ki (S_2) şartı $b = 4$ olması durumunda sağlanmaktadır. Tanım 2.1.3 de verilen (S_2) şartını S_b fonksiyonu sağlamamaktadır (Taş ve Özgür, 2021).

Tanım 2.1.6

(X, S_b) $b \geq 1$ için bir S_b-metrik uzay olsun ve $x_0 \in X$ $r > 0$ olsun. Merkezi x_0 ve yarıçapı r olan çember şu şekilde tanımlanır (Özgür ve Taş, 2018).

$$C_{x_0,r}^{S_b} = \{x \epsilon X : S_b(x, x, x_0) = r\}$$

2.1.5. Sabit çember

Tanım 2.1.7

$(X, S_b\ )$ $b \geq 1$ için bir S_b −metrik uzayı olsun ve $C_{x_0,r}^{S_b}$ X üzerinde bir çember olsun $T: X \to X$ kendi üzerine bir dönüşüm olsun. Her $x \epsilon\ C_{x_0,r}^{S_b}$ için

$Tx = x$, $C_{x_0,r}^{S_b}$ ifadesi T de bir **sabit çember** olarak tanımlanır.

Sabit bir şekil kavramı, sabit çember ve sabit disk kavramlarının bir genelleştirmesi olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Özgür ve Taş, 2018).

Tanım 2.1.8

(X, S_b) $b \geq 1\ ve\ \ x_0, x_1, x_2 \epsilon X$ olan bir S_b −metrik uzay olsun $r \epsilon [0, \infty)$

(1) x_0 merkezli yarıçapı r olan disk şu şekilde tanımlanır.

$$D_{x_0,r}^{S_b} = \{x \epsilon X : S_b(x, x, x_0) \leq r\}$$

(2) Elips de $E_r^{S_b}(x_1, x_2)$ tanımlanmış

$$E_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x \epsilon X : S_b(x, x, x_1) + S_b(x, x, x_1) = r\}$$

(3) Hiperbol de $H_r^{S_b}(x_1, x_2)$ tanımlanmış

$$H_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x \epsilon X: |S_b(x, x, x_1) - S_b(x, x, x_2) = r\}$$

(4) Cassini eğrisi $C_r^{S_b}(x_1, x_2)$ tanımlanmış

$$C_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x \epsilon X: |S_b(x, x, x_1) S_b(x, x, x_2) = r\}$$

(5) Apollonius eğrisi $A_r^{S_b}(x_1, x_2)$ tanımlanmış

$$A_r^{S_b}(x_1, x_2) = \left\{x \epsilon X - \{x_1\}: \frac{S_b(x,x,x_1)}{S_b(x,x,x_2)} = r\right\}$$

şeklinde verilmiş şimdi ise örnekleri inceleyelim.

Tanım 2.1.9

(X, S_b)'nin $b \geq 1$ ve $f: X \to X$'in üzerine dönüşümü olduğu bir S_b-metrik uzay olduğunu varsayalım. Sabit nokta kümesi $Fix(f)$'de bulunan geometrik şekil F dönüşümüne f'nin sabit şekli denir.

2.1.6. Jleli-Samet tipi büzülme

Tanım 2.1.10

(X, S_b) bir S_b-metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü olsun. Eğer $x_0 \in X$ var öyle ki

$$S_b(x, x, fx) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(x, x, fx) \leq [\varphi(S_b(x, x, x_0))]^{\propto}$$

Tüm $x \in X$ için burada $\propto \epsilon(0,1)$ ve $\varphi: (0, \infty) \to (1, \infty)$ fonksiyonu şöyledir. φ azalmıyorsa f Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$-büzülmesidir.

Teorem 2.1.1

(X, S_b) bir S_b-metrik uzayı ve $f: X \to X$ Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$-büzülmesi olsun.

$x_0 \in X$ ve r sayısı ile

$$r = \inf\{S_b(x, x, fx): x \neq fx, x \epsilon X\} \tag{2.1.7}$$

olarak tanımlanır.

O zaman f sabit disk $D_{x_0,r}^{S_b}$.

İspat: ilk başta $fx_0 = x_0$ olduğunu gösteriyoruz. $fx_0 \neq x$ olduğunu kabul edelim. Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$-büzülmesi hipotezi ile şunu elde ederiz.

$$\varphi((S_b(x, x, fx)) \leq [\varphi(S_b(x, x, x_0))]^{\propto}$$
$$= [\varphi(0)]^{\alpha}$$

olduğundan çelişki elde ederiz. Dolayısıyla;

$$fx_0 = x \tag{2.1.8}$$

olur. f nin sabit diskinin $D_{x_0,r}^{S_b}$ olduğunu göstermek için aşağıdaki durumları ele alalım.

Durum 1. $r = 0$ olsun. O zaman $D_{x_0,}^{S_b} = \{x_0\}$ ve (2.1.8) eşitliğine göre $fx_0 = x_0$ elde edilir.

Durum 2. $r > 0$ olsun ve $x\epsilon D_{x_0,r}^{S_b}$,$x \neq fx$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned} \varphi((S_b(x,x,fx)) &\leq \left[\varphi\left(S_b(x,x,x_0)\right)\right]^{\propto} \\ &\leq [\varphi(0)]^{\alpha} \\ &\leq \left[\varphi\left(S_b(x,x,fx)\right)\right]^{\propto} \end{aligned}$$

$\propto \epsilon(0,1)$ ile çelişki dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f büzülmeleri $D_{x_0,r}^{S_b}$

Şimdi aşağıdaki sonucu veriyoruz.

Sonuç 2.1.1 Eğer $b = 1$ alırsak tanım (2.1.8) elde edilir (Taş, 2021).

Tanım 2.1.11

(X, S_b) bir S_b-metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü olsun. Eğer $x_1,x_2\epsilon X$ varsa öyle ki

$$S_b(x,x,fx) > 0 \Rightarrow \varphi((S_b(x,x,fx) \leq [\varphi\left(S_b(x,x,x_1) + S_b(x,x,x_2)\right)]^{\propto}$$

Tüm $x\epsilon X \setminus \{x_1, x_2\}$ burada $\propto \epsilon(0,1)$ ve $\varphi: (0,\infty) \to (1,\infty)$ fonksiyonu şöyle tanımlanır φ azalmayan bir fonksiyondur f ‘ye Jleli-Samet tipi $E_{x_1,x_2} - S_b$ büzülmesi denir.

Teorem 2.1.2

(X, S_b) bir S_b-metrik uzay ve $f: X \to X$ Jleli-Samet tipi olsun $E_{x_1,x_2} - S_b$ büzülmesi ile $x_1, x_2 \in X$ ve r sayısı ile (2.1.7) olarak tanımlanan S_b –büzülmesidir. Eğer $fx_1 = x_2$ ve $fx_1 = x_2$ ise $E_r^{S_b}$ (x_1,x_2) elipsini sabitler.

İspat: Aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım.

Durum 3. $r = 0$ olsun. O zaman $x_1 = x_2\ ve\ E_r^{S_b}$ $(x_1,x_2) = \{x_1\} = \{x_2\}$ olur. Hipotezden $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ elde edilir.

Durum 4. Her $r > 0, x\epsilon E$, $E_r^{S_b}$ (x_1,x_2) $x \neq fx$ olacak şekilde olsun. Hipotezden

$$\begin{aligned} \varphi((S_b(x,x,fx)) &\leq \left[\varphi\left(S_b(x,x,x_1) + S_b(x,x,x_2)\right)\right]^{\propto} \\ &\leq [\varphi(r)]^{\alpha} \\ &\leq \left[\varphi\left(S_b(x,x,fx)\right)\right]^{\propto} \end{aligned}$$

$\propto \epsilon(0,1)$ olduğundan çelişki elde edilir. $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f $E_r^{S_b}$ (x_1, x_2) elipsi sabitler

Sonuç 2.1.2 Eğer $b = 1$ alırsak, sabit elips sonuçlarını elde edilir.

Tanım 2.1.12

(X, S_b) bir metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü olsun. Eğer $x_1, x_2 \epsilon X$ varsa

$S_b(x, x, f(x)) > 0 \Rightarrow \varphi((S_b(x, x, fx)) \leq \left[\varphi\left(S_b(x, x, x_1) - S_b(x, x, x_2)\right)\right]^{\propto}$

$x \epsilon X \backslash \ \{x_1, x_2\}$ için burada $\propto \in (0,1)$ ve $\varphi: (0, \infty) \to (1, \infty)$ fonksiyonu azalmayandır. Böylece f' ye Jleli- Samet tipi $H_{x_1, x_2} - S_b$-büzülmesi denir.

Teorem 2.1.3

(X, S_b) bir S_b metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm Jleli- Samet tipi $H_{x_1, x_2} - S_b$-büzülmesidir. Eğer $x_1, x_2 \epsilon X$ de $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ ve $r > 0$ (Tanım 2.1 deki gibi verildiyse) hiperbol sağlanıyorsa f fonksiyonu $H_r^{S_b}(x_1, x_2)$ hiperbolünü sabitler.

İspat $x \in H_r^{S_b}(x_1, x_2)$, $x \neq fx$ olacak şekilde seçilen herhangi bir nokta olsun. Hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned}\varphi((S_b(x, x, fx)) &\leq \left[\varphi\left(S_b(x, x, x_1) + S_b(x, x, x_2)\right)\right]^{\propto} \\ &\leq [\varphi(r)]^{\alpha} \\ &\leq \left[\varphi\left(S_b(x, x, fx)\right)\right]^{\propto}\end{aligned}$$

$\propto \epsilon (0,1)$ ile çelişki olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f $H_r^{S_b}(x_1, x_2)$ hiperbolünü sabitler.

Sonuç 2.1.3 Eğer $b = 1$ alırsak o zaman S- metrik uzayda Sabit Hiperbol eğrisi sonuçlarını elde edilir.

Tanım 2.1.13

(X, S_b) bir metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü olsun. Eğer $x_1, x_2 \epsilon X$ varsa her $x \epsilon X \backslash \ \{x_1, x_2\}$

$$S_b(x, x, fx) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(x, x, fx)) \leq \left[\varphi\left(S_b(x, x, x_1) S_b(x, x, x_2)\right)\right]^{\propto}$$

için burada $\propto \in (0,1)$ ve $\varphi: (0, \infty) \to (1, \infty)$ fonksiyonu φ azalmayan olduğundan f ye Jleli-Samet tipi $C_{x_1, x_2} - S_b$-büzülmesi denir.

Teorem 2.1.4

(X, S_b) S_b-metrik uzay ve $f: X \to X$ Jleli-Samet tipi $C_{x_1, x_2} - S_b$-büzülmesi ile $x_1, x_2 \epsilon X$ ve r sayısı (Tanım 2.1) gibi verilsin. S_b-büzülmesi eğer $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ ise f Cassini eğrisi $C_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ni sabitler.

İspat: Aşağıdaki durumları göz önünde bulunduralım.

Durum 5. $r = 0$ olsun ozaman $x_1 = x_2$ ve $C_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x_1\} = \{x_2\}$ olacak şekilde elde ettiğimiz hipotez herhangi bir nokta olsun.

Durum 6. $r > 0$ ve $x \epsilon\, C_r^{S_b}(x_1, x_2) olsun. x \neq fx$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} \varphi((S_b(x,x,fx)) &\leq \left[\varphi\big(S_b(x,x,x_1)S_b(x,x,x_2)\big)\right]^{\propto} \\ &\leq [\varphi(r)]^{\alpha} \\ &\leq \left[\varphi\big(S_b(x,x,fx)\big)\right]^{\propto} \end{aligned}$$

$\propto \epsilon(0,1)$ile çelişki elde edilir. Dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f Cassine eğrisi $C_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ni sabitler.

Sonuç 2.1.4 Eğer $b = 1$ alırsak o zaman S-metrik uzayda Cassini eğrisinin sonuçlarını elde edilir.

Tanım 2.1.12

(X, S_b) bir S_b metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü olsun. Eğer $x_1, x_2 \epsilon X$ varsa,
her $x \epsilon X \setminus \{x_1, x_2\}$

$$S_b(x,x,fx) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(x,x,fx)) \leq [\varphi(\tfrac{S_b(x_1,x_2,x_3)}{S_b(x_1,x_2,x_3)}]^{\propto}$$

için burada $\propto \in (0,1) ve\ \varphi: (0,\infty) \to (1,\infty)$ fonksiyonu $azalmayandır$. Öyleyse f ye Jleli-Samet tipi $A_{x_1,x_2} - S_b$-büzülmesi denir.

Teorem 2.1.5

(X, S_b) S_b-metrik uzay ve $f: X \to X$ Jleli-Samet tipi $A_{x_1,x_2} - S_b -$ ile $x_1, x_2 \epsilon X$ ve r sayısı (Tanım 2.1) olarak tanımlanan S_b-büzülmesi eğer $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ ise f Apollonius dairesi $A_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ni sabitler.

İspat: Aşağıdaki durumları göz önünde bulundurursak;

Durum7. $r = 0$ olsun. O zaman $x_1 = x_2$ ve $A_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x_1\} = \{x_2\}$ olacak şekilde hipotezden $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ elde edilir.

Durum 8. $r > 0$ ve $x \epsilon A_r^{S_b}(x_1, x_2)$ noktası $x \neq fx$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(S_b(x,x,fx)) &\leq [\varphi(\tfrac{S_b(x,x,x_1)}{S_b(x,x,x_3)}]^{\propto} \\ &\leq [\varphi(r)]^{\alpha} \\ &\leq \left[\varphi\big(S_b(x,x,fx)\big)\right]^{\propto} \end{aligned}$$

$\propto \epsilon(0,1)$olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f Apollonius çemberi $A_r^{S_b}(x_1, x_2)'$ni sabitler.

Sonuç 2.1.5 Eğer $b = 1$ alırsak o zaman sabit Apollonius çemberi sonuçlarını S-metrik uzayda elde ederiz.

Son olarak aşağıdaki açıklayıcı örneği veririz

Örnek 2.1.2

(Özgür N.Y. ve Taş N.2017) $X = [-1,1] \cup \{-7, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{7}{3}, 7, 8, 21\}$ tanımlanan bir küme ve $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için S-metrik

$$S(x, y, z) = |x - z| + |x + z - 2y|$$

Bu S-metrik $b = 1$ için bir S_b-metriktir. $f: X \to X$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$fx = \begin{cases} x, & X - \{8\} \\ 7, & x = 8 \end{cases}$$

ve $\varphi: (0, \infty) \to (1, \infty)$ fonksiyonu $\forall t > 0$ için $\varphi(t) = t + 1 \ verilsin$ ve $r = 2$ olsun.

O halde f fonksiyonu Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$-büzülmesi ile $\propto = 0.5, x_0 = 0$. Sonuç olarak $D_{0,2}^{S_b} = [-1,1]$

f fonksiyonu $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ ve $\propto = 0.5$ ile Jleli-Samet tipi E_{x_1, x_2} S_b-büzülmesidir. Sonuç olarak f elipsi $E_2^{S_b}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$=[- $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$] sabitler.

f fonksiyonu $x_1 = -1, x_2 = 1 \ ve \propto = 0.9$ Jleli-Samet tipi $H_{x_1, x_2} - S_b$-büzülmesidir. Sonuç olarak f hiperbolü $H_2^{S_b}(-1,1) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ sabitler.

f fonksiyonu $x_1 = -1, x_2 = 1$ ve $\propto = 0.5$ Jleli-Samet tipi $C_{x_1, x_2} - S_b$-büzülmesidir. Sonuç olarak f Cassini eğrisi $C_2^{S_b}$(-1,1)=$\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ sabitler.

f fonksiyonu $x_1 = -7, x_2 = 7$ ve $\alpha = 0.5$ Jleli-Samet tipi $A_{x_1, x_2} - S_b$- büzülmesidir. Sonuç olarak f Apollonius eğrisi $A_2^{S_b}(-7,7)$=$\{\frac{7}{3}$,21$\}$ sabitler.

3. YÖNTEM

Bu bölümde, (Alghamdi vd., 2021)'de S-metrik uzaylar üzerinde tanımlanan Proinov tipi E-büzülmesini kullanarak bazı sabit nokta ve sabit şekil sonuçlarını kanıtlarız. Ayrıca, bazı açıklayıcı örnekler verelim.

3.1. Bazı Sabit Nokta Sonuçları

Bu alt bölümde, (Y, S)'nin tam bir S-metrik uzay, $T : Y \to Y$'nin dönüşümü $\alpha, \beta : (0, \infty) \to R$'nin

$$\beta(s) < \alpha(s) \tag{3.1.4}$$

koşulunu her $s > 0$ için iki fonksiyon olduğunu ve $\theta : Y \times Y \to [0, \infty)$'nin bir fonksiyon olduğunu varsayalım.

Tanım 3.1.1

Eşitsizlik durumunda N'ye α $(\theta, \alpha, \beta) - E_s$- büzülmesi denir.

$$\theta(q, w)\alpha[S(Nq, Nq, Nw)] \leq \beta[E_s(q, w)] \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği $S(q, q, w) > 0$ ve $S(Nq, Nq, Nw) > 0$ olan $\forall q, w \in Y$ için geçerliyse $(\theta, \alpha, \beta) - E_s$-büzülmesi olarak adlandırılır, burada

$$E_s(q, w) = max \begin{cases} \mathrm{S(q, q, w) + |S(q, q, Nq) - S(w, w, Nw)|,} \\ \frac{S(q,q,Tw)+S(w,w,Tq)}{3} \end{cases} \}$$

olarak alınmıştır.

Teorem 3.1.1

N, bir (θ, α, β)-E_s-büzülmesi olsun öyle ki:

(s_1) α artmayan ve alt yarı-süreklidir,

(s_2) $\forall s_0 > 0$ için $\lim\limits_{s \to s_0} sup\beta(s) < \alpha(s_0)$

(s_3) N, θ-ü.o.g ve öyle bir $q_0 \in Y$ noktası var ki $\theta(q_0, N_{q_0}) \geq 1$

(s_4) $\forall v \epsilon \mathbb{N}$ için q_v gibi bir dizi verildiğinde ve $q_v \to q^*$ ve $\theta(q_v, q_{v+1}) \geq 1$

O hâlde T'nin sabit bir noktası vardır.

Teorem 3.1.2

Cümleyi şu şekilde tamamlayalım

(s_5) Her $q, w \in Fix(N), \theta(q, w) \geq 1$ için sağlanıyorsa ve bu koşul Teorem 3.1.1'in varsayımlarına eklenirse,

oluyorsa o hâlde N fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır.

Sonuç 3.1.1

N fonksiyonu, her farklı $q, w \in Y$ için ve $S(Nq, Nq, Nw) > 0$ koşuluyla aşağıdaki eşitsizliği sağlasın:

$$\alpha[S(Nq, Nq, Nw)] \leq \beta[E_s(q, w)]$$

Aşağıdaki varsayımlar geçerli olsun:

(s_0) Her $s > 0$ için $\beta(s) < \alpha(s)$

(s_1) α artmayandır ve alt yarı-süreklidir.

(s_2) Her $s_0 > 0$ için $\lim_{s \to s_0} sup\beta(s) < \alpha(s_0)$

N fonksiyonunun tek sabit noktası vardır.

İspat: Eğer $\theta(q, w) = 1$ teorem 3.1.1 de alınırsa ispat biter.

Sonuç 3.1.2

N fonksiyonu, her farklı $q, w \in Y$ için ve $S(Nq, Nq, Nw) > 0$ koşulu altında aşağıdaki eşitsizliği sağlasın:

$$\alpha[S(Nq, Nq, Nw)] \leq c\ \alpha[ES(q, w)]$$

burada $c \in [0,1)$ ve $\alpha:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu artmayan ve soldan sürekli olsun. O hâlde, N fonksiyonunun tek sabit noktasıvardır.

İspat: sonuç 3.1.1 de $\beta(s) = c\alpha(s)$ alınırsa ispat biter.

Örnek 3.1.1

[Özgür vd., 2017] $Y = [0, \infty)$ kümesi her $q, w, t \in Y$

$$S(q, w, z) = | q - t | + | q + t - 2w |$$

şeklinde tanımlanan bir S-metrik ile birlikte tam bir S-metrik uzayı olsun.

Eğer $N: Y \to Y$ dönüşümü,

$$N_q = \frac{q}{2}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu N fonksiyonu Teorem 6.1 ve Teorem 6.2'nin tüm koşullarını sağlar. $\alpha(s) = \frac{s}{2}$, $\beta(s) = \frac{s}{3}$ ve $\theta(q,w) = 1$ olduğunda sonuç olarak, N fonksiyonunun tek sabit noktası vardır ve bu nokta $q = 0$ dır.

Tanım 3.1.4

Bir N fonksiyonu, her $q, w \in Y$ için

$$\theta(q,w) \cdot \alpha(S(N^2q, N^2q, N^2w)) \leq \beta(E^2 s(q,w))$$

eşitsizliği,

$$S(q,q,w) > 0 \text{ ve } S(Nq,Nq,Nw)$$

olmak koşuluyla sağlanıyorsa, bu fonksiyon bir (θ, α, β)-E_S^2-büzülmesi olarak adlandırılır.

$$E_S^2(q,w) = max\begin{cases} S(w,w,Nw) + |S(q,q,w) - S(q,q,Nq)|, S(Nq,Nq,Nw) + \\ \qquad |S(Nq,Nq,N^2q) - S(Nw,Nw,N^2w| \\ S(Nw,Nw,N^2w) + |S(Nq,Nq,N^2q) - S(w,w,Nw)| \end{cases}$$

Teorem 3.1.3

N fonksiyonu bir (θ, α, β)-E_S^2-büzülmesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyor olsun:

(s_1) α artmayan ve alt yarı-süreklidir

(s_2) Her $s_0 > 0$ için $\lim\limits_{s \to s_0} sup\beta(s) < \alpha(s_0)$

(s_3) N θ-ü.o.g olsun ve öyle bir $q_0 \in Y$ noktası vardır ki $\theta(q_0, Nq_0) \geq 1$

(s_6) N^2 sürekli ve her $w \in Fix(N^2)$ için $\theta(Nw,w) \geq 1$ eşitsizliği geçerli olsun.

O hâlde, N fonksiyonunun bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.1.4

Teorem 6.3'ün hipotezine her bir $q, w \in Fix(N)$ için

(s_5) $\theta(q,w) \geq 1$ koşulunu eklersek, N'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat: $t, w \in Fix(N)$ olsun ve $t \neq w$ olsun. (s_5) kuralına uygulanırsa,

$$\alpha[S(t,t,w)] \leq \theta(t,w)\alpha[S(N^2t, N^2t, N^2w]$$
$$\leq \beta[E_S^2(t,w)] < \alpha[E_S^2(t,w)] = \alpha[S(t,t,w)]$$

elde ederiz; bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, T'nin tek bir sabit noktası vardır.

Sonuç 3.1.3 N, her farklı $q, w \in Y$ için

$$\alpha[S(N^2q, N^2q, N^2w)] \leq \beta[E_S^2(q,w)]$$

$S(N^2q, N^2q, N^2w) > 0$ olacak şekilde sağlıyor olsun.

(s_0) Her $s > 0$ için $\beta(s) < \alpha(s)$ olduğunu,

(s_1) α'nın azalmayan ve alt yarı-sürekli olduğunu,

(s_2) $\lim_{s \to s_0} sup\beta(s) < \alpha(s_0)$ için $s_0 > 0$

(s6) N^2sürekli dir.

Bu durumda $N'nin$ tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Teorem 6.3'te $\theta(q,w) = 1$ alırsak, bu kolayca ispatlanabilir.

Sonuç 3.1.4 N, her farklı $q,w \in Y$ içi

$$\alpha[\, S(N^2q, N^2q, N^2w)] \leq c\alpha < [E_S^2(q,w)]$$

sağlıyor olsun, öyle ki $c \in [0,1), S(Nq, Nq, Nw) > 0$ ve $\alpha: (0,\infty) \to (0,\infty)$ azalmayan ve soldan süreklidir. O zaman N'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Sonuç 6.3'te $\beta(s) = c\alpha(s)$ alırsak, ispat biter.

Örnek 3.1.2

$Y = [0,10], S$-metrik uzayı olsun ve Örnek 6.1'deki gibi S-metrik uzayı tanımlansın.

$N : Y \to Y$ dönüşümü şu şekilde verilsin. Her $q \in Y$ için.

$$N_q = \begin{cases} 0, & q \in [0,2] \\ 2, q \in (2,4] \\ \frac{q-4}{4}, q\epsilon(4,8] \\ \frac{q}{2}, q\epsilon(8,10] \end{cases}$$

$\alpha, \beta : (0,\infty) \to R$'nin α'nın azalmayan ve herhangi bir $s > 0$ için $\beta(s) < \alpha(s)$ fonksiyonlar olduğunu varsayalım. O zaman $N, q = \frac{4}{3} ve\, w = \frac{7}{3}$ için Teorem 6.1'in koşullarını sağlar. Öte yandan,

$$N^2q = \begin{cases} 0, q \in [0,8] \\ \frac{q-8}{8}, q \in (8,10] \end{cases}$$

Ve N^2 süreklidir. Bu nedenle, N Teorem 6.3'teki koşulları sağlar;

$$\theta(q,w) = \begin{cases} q^3 + w^3, \quad q,w \in [0,8] \\ 1, \qquad q,w \in (8,10] \\ 2, \quad q \in (8,10], w \in [0,2] \\ 0, diğer\ durumlar \end{cases}$$

$$\alpha(s) = \frac{s}{4}$$

$$\beta(s) = \frac{s}{6}$$

Sonuç olarak, N'nin tek bir sabit noktası $q = 0$ vardır.

Tanım 3.1.5

F bir geometrik şekil olsun. Eğer $F \subset Fix(N)$ ise F'ye N'nin sabit şekli denir. r sayısının

$$r = inf\{S(q,q,Nq) : q \notin Fix(N)\}$$

şeklinde tanımlandığını varsayalım.

3.2. Bazı Sabit Disk Sonuçları

Bu bölümde, S-metrik uzaylarda bazı sabit disk (veya sabit çember) sonuçları aşağıda verilmiştir. Bunu yapmak için iki yeni büzülme tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1

Eğer $q_0 \in Y$ varsa ve her $q \in Y - Fix(N)$ için

$$\theta(q,q_0)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S(q_0,q_0)}{2}\right]$$

Varsa, N'ye $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_D}$- büzülme denir.

Teorem 3.2.1

N, $q_0 \in$ Y olan bir $(\theta,\alpha,\beta) - E_{SD}$-büzülmesi olsun.

Eğer $S(q_0,q_0,Nq) \leq r$ ise o zaman $q_0 \in Fix(N)$ ve ,$D^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$ olur. Özellikle $C^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$.

İspat: İlk olarak, $q_0 \in Fix(N)$ olduğunu kanıtlıyoruz. Aksine, $q_0 \notin Fix(N)$ olsun. Hipotezi kullanarak, şunu elde edilir:

$$\alpha[S(q_0,q_0,N_{q_0})] \leq \theta(q_0,q_0)\ \alpha[S(q_0,q_0,N_{q_0})] \leq \beta \left[\frac{E_S(q,q_0)}{2}\right]$$

$$E_S(q,q_0) = S(q_0,q_0,Nq_0)$$

(21.22) olması için.

$$\alpha[S(q_0,q_0,Nq_0)] \leq \beta \left[\frac{S(q_0,q_0,Nq_0)}{2}\right] < \alpha \left[\frac{S(q_0,q_0,Nq_0)}{2}\right]$$

Çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla şunu elde ederiz.

$$q_0 \in Fix(N)$$

Şimdi $D^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$'yi aşağıdaki durumlarda gösteriyoruz.

Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman $D^S_{q_{0,r}} = \{q_0\}$ olur. (21.23)'e göre

$$D^S_{q_{0,r}} \subset \{q_0\}$$

elde edilir.

Durum 2: $r > 0$ ve $k \in D^S_{q_{0,r}}$ olsun ki $q \notin Fix(N)$. Hipotezi kullanarak, şunu elde ederiz: burada

$$\alpha[S(q,q,N_q)] \leq \theta(q,q_0)\ \alpha[S(q,q,N_q)] \leq \beta\left[\frac{E_S(q,q_0)}{2}\right]$$

Burada

$$E_S(q,q_0) \leq \quad 2S(q,q,N_q)]$$

(21.24) yardımıyla;

$$\alpha\big[S\big(q,q,N_q\big)\big] \leq\ \beta\left[\frac{E_S(q,q_0)}{2}\right] < \alpha\left[\frac{E_S(q,q_0)}{2}\right] \leq \alpha[S(q,q,Nq)]$$

Bu bir çelişkidir. Yani $q \in Fix(N)$ olur. Sonuç olarak,

$$D^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$$

$C^S_{q_{0,r}}$ çemberi $D^S_{q_{0,r}}$diskinin bir sınırı olduğundan,

$$C^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$$

elde edilir.

Tanım 3.2.2

Eğer $q_0 \in Y$ ve her $q \in Y - Fix(N)$ için

$$\theta(q,q_0)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta\left[\frac{E_S^2(q_0,q_0)}{2}\right]$$

N'ye $(\theta,\alpha,\beta) - E^2_{S_D}$-büzülmesi denir.

Teorem 3.2.2

N, $q_0 \in Y$ için $(\theta,\alpha,\beta) - E^2_{S_D}$-büzülmesi olsun.

Eğer $\big[S\big(q_0,q_0,N_{q_0}\big)\big] \leq r\ Nq_0 \epsilon Fix(N)$ ve $q \in Fix(N^2)$ ise, $q_0 \in Fix(N)$ ve $D^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$ dir. Ayrıca $C^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$ olur.

İspat İlk önce, $q_0 \in Fix(N)$ olduğunu ispatlıyoruz. Tersini kabul edelim $q_0 \notin Fix(N)$ olduğunu varsayıyoruz. Hipotezi kullanarak,

$$\alpha[S(q_0,q_0,N_{q_0})] \leq \theta(q_0,q_0)\ \alpha[S(q_0,q_0,N_{q_0})]$$

$$\leq \beta\left[\frac{E_S^2(q_0,q_0)}{2}\right] = \beta[S(q_0,q_0,N_{q_0})]$$

$$\leq \alpha[S(q_0,q_0,N_{q_0})]$$

elde ederiz; bu bir çelişkidir.

$q_0 \in Fix(N)$ olmalıdır.

Şimdi $D^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$ olduğundan aşağıdaki durumlarda ispatlıyoruz:

Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman$D^S_{q_{0,r}} = \{q_0\}$ olur. (21.25'e göre),

$$D^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$$

elde edilir.

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in D^S_{q_{0,r}}$ olsun, böylece $q \notin Fix(N)$ olur. Hipotezi kullanarak,

$$\alpha\left[S\left(q,q,N_q\right)\right] \leq \theta(q,q_0)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta\left[\frac{E_S^2(q_0,q_0)}{2}\right]$$

$$< \alpha\left[\frac{E_S^2(q_0,q_0)}{2}\right] \leq \alpha\left[S\left(q,q,N_q\right)\right]$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $q \in Fix(N)$ olmalı ve

$$D^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$$

elde edilir.

$C^S_{q_{0,r}}$ çemberi $D^S_{q_{0,r}}$ diskinin bir sınırı olduğundan,

$$C^S_{q_{0,r}} \subset Fix(N)$$

elde edilir.

Örnek 3.2.1

$Y = \mathbb{R}$, S-metrik Örnek 3.2.1'deki gibi S-metrik uzayı olsun ve $N : Y \to Y$ dönüşümü tanımlansın.

$$N_q = \begin{cases} q, q \in Y - \{2\} \\ 3, q = 2 \end{cases}$$

tüm $q \in Y$ için O zaman N hem $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_D}$-büzülmesi, hem de $(\theta,\alpha,\beta) - E^2_{S_D}$-büzülmesidir; burada $q_0 = 0, \theta(q,y) = 1, \alpha(s) = \frac{s}{2}\, ve\; \beta(s) = \frac{s}{3}$ olur. Ayrıca,

$$r = 2$$

olur. Sonuç olarak, N $D^S_{0,2} = [-1,1]$ diskini ve $C^S_{0,2} = \{-1,1\}$ çemberini sabitler.

3.3. Bazı Sabit Elips Sonuçları

Bu bölümde, S-metrik uzaylarda iki sabit elips sonucunu kanıtlayacağız.

Tanım 3.3.1

Eğer $q_1, q_2 \epsilon Y$ için her $q \in Y - Fix(N)$

$$\theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta\left[\frac{E_S(q,q_1)+E_S(q,q_2)}{4}\right]$$

için sağlanıyorsa N ye $(\theta,\alpha,\beta)-E_{s_D}$-büzülmesi denir.

Teorem 3.3.1

$N, q_1, q_2 \in Y$ ile bir $(\theta,\alpha,\beta)-E_{S_D}$-büzülmesi olsun.

Eğer $q_1, q_2 \in Fix(N)$ ve $S(Nq,Nq,q_1)+S(Nq,Nq,q_2) = r$ ise o zaman

$$E_r^S(q_1,q_2) \subset Fix(N).$$

İspat: Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman $E_r^S = (q_1,q_2) = \{q_1\} = \{q_2\}$ olur. Hipoteze göre

$$E_r^S \ (q_1,q_2) \ \subset Fix(N)$$

elde edilir.

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in E_r^S(q_1,q_2)$ olsun, öyle ki $q \notin Fix(N)$olur. Hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned}\alpha\left[S\left(q,q,N_q\right)\right] &\leq \theta(q,q_0)\alpha[S(q,q,Nq)]\\ &\leq \beta\left[\frac{E_S(q,q_1)+E_S(q,q_2)}{4}\right]\\ &\leq \alpha\left[\frac{E_S(q,q_1)+E_S(q,q_2)}{4}\right]\\ &\leq \alpha\left[S\left(q,q,N_q\right)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Bu yüzden $q \in Fix(N)$ olur.Sonuç olarak,

$$E_r^S = (q_1,q_2) \subset Fix(N) \text{ olur.}$$

Tanım 3.3.2

Eğer $q_1,q_2 \epsilon Y$ için her $q \in Y - Fix(N)$

$$\theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta\left[\frac{E_S^2(q,q_1)+E_S^2(q,q_2)}{4}\right]$$

koşulunu sağlayan varsa N ye $(\theta,\alpha,\beta)-E_{S_E}^2$-büzülmesi denir.

Teorem 3.3.2

$N, q_1, q_2 \in Y$ ile bir $(\theta,\alpha,\beta)-E_{S_E}^2$ -büzülmesi olsun.

Eğer $q_1, q_2, N_{q_1}, N_{q_2} \in Fix(N)$, $q \in Fix(N^2)$ ve S$(Nq,Nq,q_1)+ S(Nq,Nq,q_2) = r$ ise o zaman $E_r^S \ (q_1,q_2) \subset Fix(N)$ olur.

İspat: Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman $E_r^S = (q_1,q_2)$ tarafından hipotez ile

$$E_r^S(q_1,q_2) \ \subset Fix(N)$$

Elde ederiz.

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in E_r^S(q_1, q_2)$ öyle ki $q \notin Fix(N)$ Hipotezi kullanarak,

$$\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)]$$
$$\leq \beta\left[\frac{E_S(q,q_1)+E_S(q,q_2)}{4}\right]$$
$$\leq \alpha\left[\frac{E_S(q,q_1)+E_S(q,q_2)}{4}\right]$$
$$\leq \alpha\left[S\left(q,q,N_q\right)\right]$$

Bu bir çelişkidir. Yani $q \in Fix(N)$ olur. Sonuç olarak,

$$E_r^S(q_1,q_2) \subset Fix(N)$$

elde edilir.

Örnek 3.3.1

Y = [-1,1]∪{2,4} Örnek 6.1'deki gibi, S-metriğinin tanımlandığı bir S-metrik uzayı olsun. Bir $N : Y \to Y$ dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım. Her $q \in Y$ için

$$N_q = \begin{cases} q, & q \epsilon Y - \{4\} \\ 2, & q = 4 \end{cases}$$

o zaman N hem $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_E}$-büzülmesi hem de $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_E}^2$-büzülmesi ile $q_1 = -1, q_2 = 1, \theta(q,y) = 1, \alpha(s) = \frac{s}{2}\ ve\ \beta(s) = \frac{s}{3}$. Ayrıca r = 4'e olur.

Sonuç olarak, N, $E_4^S(-1,1) = [-1,1]$ elipsini sabitler.

3.4. Bazı Sabit Hiperbol Sonuçları

Bu bölümde, S-metrik uzaylarda iki sabit hiperbol sonucunu göstereceğiz.

Tanım 3.4.1

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ varsa, her $q \in Y - Fix(N)$ için

$$\theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta[|E_S(q,q_1) - E_S(q,q_1)|]$$
$$S\left(q,q,N_q\right) \geq max\left\{S\left(N_q,N_{q,}q_1\right), S(N_q,N_q,q_2\right\}$$

geçerli olacak şekilde $q_1, q_2 \in Y$ varsa, N'ye $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_H}$-büzülmesi denir.

Teorem 3.4.1

$N, q_1, q_2 \in Y$ ile bir $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_H}$-büzülmesi olsun. Eğer $q_1, q_2 \in Fix(N)$ ve $r > 0$ ise o zaman $H_r^S(q_1,q_2) \subset Fix(N)$ olur.

İspat: $q \in H_r^S(q_1,q_2)$ olsun, öyle ki $q \notin Fix(N)$ olur. Teoremi kullanarak,

$$\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta\,[|E_s(q,q_1) - E_s(q,q_2)|]$$

elde edilir. Burada

$$E_S(q,q_1) = S(q,q,q_1) + S(q,q,Nq)$$

ve

$$E_S(q,q_2) = S(q,q,q_2) + S(q,q,Nq)$$

elde edilir.

$$\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta[|S(q,q,q_1) - S(q,q,q_2)|] = \beta[r]$$
$$< \alpha[r] \leq \alpha[S(q,q,Nq)],$$

Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$H_r^S(q_1,q_2) \subset Fix(N)$$

elde edilir.

Tanım 3.4.2

Eğer $q_1,q_2 \epsilon Y$ varsa her $q \in Y - Fix(N)$ için

$$\theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta\, E_S^2(q,q_1) - E_S^2(q,q_2)$$

olacak şekilde, $N'ye\ (\theta,\alpha,\beta) - E_{S_H}^2$-büzülmesi denir.

Teorem 3.4.2

$N, q_1,q_2 \in Y$ ile bir$(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_H}^2$-büzülmesi olsun.

Eğer $q_1,q_2,N_{q_1},N_{q_2} \in Fix(N)$ ise $|S(Nq,Nq,q_1) – S(Nq,Nq,q_2)| = r, q \in Fix(N^2)$ve $r > 0$ ise o zaman. $H_r^S(q_1,q_2) \subset Fix(N)$

İspat: $q \in H_r^S(q_1,q_2)$ olsun öyle ki $q \notin Fix(N)$. Hipotezi kullanarak,

$$\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta[\,E_S^2(q,q_1) - E_S^2(q,q_2)] \tag{6.20}$$

buradan

$$E_S^2(q,q_1) = S(Nq,Nq,q_1) + S(q,q,Nq)]$$

ve

$$E_S^2(q,q_2) = S(Nq,Nq,q_2) + S(q,q,Nq)$$

(21.27) bakarak şunu elde edilir.

$$\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \beta[|S(q,q,q_1) - S(q,q,q_2)|]$$
$$= \beta[r] < \alpha[r] \leq \alpha[S(q,q,Nq)],$$

Bir çelişki dolayısıyla elde edilir.

$$H_r^S(q_1,q_2) \subset Fix(N)$$

Örnek 3.4.1

$Y = [-1,1] \cup \{2,3\}, S$-metriğinin tanımlandığı bir S-metrik uzayı olsun.

Örnek 6.1'deki gibi. Dönüşümü bir $N : Y \rightarrow Y$'yi şu şekilde tanımlayalım.

$$N_q = \begin{cases} q & q \in Y - \{3\} \\ 2, & q = 3 \end{cases}$$

$\forall q \in Y$ için. O zaman N hem $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_H}$-büzülmesi hem de $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_H}^2$-büzülmesidir, burada $q_1 = -1, q_2 = 1, \theta(q, y) = 1, \alpha(s) = \frac{s}{2}$ ve $\beta(s) = \frac{s}{3}$'tür. Ayrıca

$$r = 2$$

Sonuç olarak, N, $H_2^S(-1,1) = \{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\}$ hiperbolünü sabitler.

3.5. Bazı Sabit Cassini Eğrisi Sonuçları

Bu bölümde S-metrik uzaylarda iki sabit Cassini eğri teoremini ispatlarız.

Tanım 3.5.1

Eğer $q_1, q_2 \epsilon Y$ varsa her $q \in Y - Fix(N)$ için,

$$\theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta\left[\sqrt{\frac{E_S(q, q_1)E_S(q, q_1)}{4}}\right]$$

ve

$$S(q, q, Nq) \geq max\left\{\begin{matrix} S(q, q, q_1), S(q, q, q_2) \\ S(Nq, Nq, q_1), S(Nq, Nq, q_2) \end{matrix}\right\}$$

$N'ye$ $(\theta, \alpha, \beta) - E_{s_c}$-büzülmesi denir.

Teorem 3.5.1

$q_1, q_2 \in Y$ için N $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_C}^2$-büzülmesi olsun Eğer $q_1, q_2, Nq_1, N_{q_2} \in Fix(N)$ ve $q \in Fix(N^2)$ise C_r^S $(q_1, q_2) \subset Fix(N)$ olur.

İspat: Durum 1: $r = 0$ olsun. O halde Cs_r^s $(q_1, q_2) = \{q_1\} = \{q_2\}$. Tarafından hipotez, şunu elde edilir.

$$C_r^S (q_1, q_2) \subset Fix(N).$$

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in C_r^S$ (q_1, q_2) olsun öyle ki $q \notin Fix(N)$. Hipotezi kullanarak, buluruz

$$\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)]$$

$$\leq \beta\left[\sqrt{\frac{E_S^2(q,q_1)E_S^2(q,q_1)}{4}}\right]$$

$$< \alpha\left[\sqrt{\frac{E_S(q,q_1)E_S(q,q_1)}{4}}\right]$$

$$\leq \ \alpha[S(q,q,Nq)]$$

Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$C_r^S\ (q_1,q_2) \subset \ Fix(N).$$

Örnek 3.5.1

$Y \ = \ [-1,1] \cup \{-\sqrt{2},\sqrt{2},2,3\}$ bir S-metrik uzay olsun.

Örnek 6.1'deki gibi tanımlanan metrik. Bir $N : \ Y \ \rightarrow \ Y$ dönüşümü şu şekilde tanımlayalım.

$$N_q = \begin{cases} q\,, & q \in Y-\{3\} \\ 2\,, & q=3 \end{cases}$$

$\forall q \ \in \ Y$ için. O zaman N hem $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_c}$-büzülmesi hem de $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_c}^2$-büzülmesidir. Burada $q_1 = -1, q_2 = \ 1, \theta(q,y) \ = \ 1, \alpha(s) \ = \frac{s}{2}\ ve\ \beta(s) \ = \ \frac{s}{3}$'tür. Ayrıca

$r \ = \ 2$ olur.

Sonuç olarak, N, $C_2^s(-1,1) = \{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ Cassini eğrisini sabitler.

3.6. Bazı Sabit Apollonius Çemberi Sonuçları

Bu bölümde S-metrik uzaylarda iki sabit Apollonius çemberi teoremini ispatlayalım.

Tanım 3.6.1

Eğer $q_1,q_2 \ \in \ Y$ varsa, her $q \ \in \ Y \ - Fix(N)$ için

$$\theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq) \leq \beta\left[\frac{E_S(q_1,q_2)}{E_S(q,q_2)}\right]$$

ve

$$S(q,q,Nq) \geq max\begin{Bmatrix} S(q,q,q_1),S(q,q,q_2) \\ S(Nq,Nq,q_1),S(Nq,Nq,q_2) \end{Bmatrix}$$

$N'ye\ (\theta,\alpha,\beta) - E_{s_a}$-büzülmesi denir.

Teorem 3.6.1

N $(\theta,\alpha,\beta) - E_{S_A}$-büzülmesi olsun $q_1,q_2 \in \ Y$ Eğer $q_1,q_2,N_{q_1},N_{q_2} \ \in \ Fix(T)$ ve $q \ \in \ Fix(N^2)$ ise $A_r^S\ (q_1,q_2) \subset \ Fix(N)$ olur.

İspat: Durum1: $r=0$ ozaman hipotez gereği $A_r^S\,(q_1,q_2)$=$\{q_1\}$ ele aldık.

$A_r^S\,(q_1,q_2) \subset\ Fix(N)$.

Durum2: $r>0$ ve $q\epsilon A_r^S\,(q_1,q_2)$ böylece $q \notin Fix(N)$ hipotezini kullandık.

$$\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)$$
$$\leq\ \beta\left[\frac{E_S(q_1,q_2)}{E_S(q,q_2)}\right]$$
$$\leq \alpha\left[\frac{E_S(q_1,q_2)}{E_S(q,q_2)}\right] \leq \alpha[1]$$

Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$A_r^S\,(q_1,q_2) \subset\ Fix(N)$$

olur.

Tanım 3.6.2

Eğer $q_1,q_2\ \in\ Y$ varsa, her $q\ \in\ Y\ -Fix(N)$ için,

$$\theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq) \leq \beta\left[\frac{E_S^2(q,q_1)}{E_S^2(q,q_2)}\right]$$

ve

$$S(q,q,Nq) \geq max\{1, S(Nq,Nq,q_1), S(Nq,Nq,q_2)\}$$

N'ye $(\theta,\alpha,\beta)-E_{S_A}^2$-büzülmesi denir.

Teorem 3.6.2

$q_1,q_2 \in\ Y, N\ \ (\theta,\alpha,\beta)-E_{S_A}^2$-büzülmesi olsun. Eğer $q_1,q_2,N_{q_1},N_{q_2}\ \in Fix(N)$ ve $q\ \in Fix(N^2)$ sonra $A_r^S\,(q_1,q_2) \subset\ Fix(N)$.

İspat: Durum1: $r=0$ ozaman hipotez gereği $A_r^S\,(q_1,q_2)$=$\{q_1\}$ ele aldık.

$$A_r^S\,(q_1,q_2) \subset\ Fix(N).$$

Durum2: $r>0$ ve $q\epsilon A_r^S\,(q_1,q_2)$ böylece $q \notin Fix(N)$ hipotezini kullandık

$$\alpha[S(q,q,Nq)] \leq \theta(q_1,q_2)\alpha[S(q,q,Nq)$$
$$\leq\ \beta\left[\frac{E_S(q_1,q_2)}{E_S(q,q_2)}\right]$$
$$\leq \alpha\left[\frac{E_S(q_1,q_2)}{E_S(q,q_2)}\right] \leq \alpha[1]$$

Dolayısıyla bu bir çelişkidir. $A_r^S\,(q_1,q_2) \subset\ Fix(N)$.

4. BULGULAR

4.1. Bazı Güncel Sabit Nokta Sonuçları S_b −Metrik Uzaylar ve Uygulamaları

Açıklama 1

Bir S-metrik, değişkenlere göre otomatik olarak simetriktir.

Örnek 4.1.1

(Y, S_b) $s \geq 1$ için çiftini ele alalım, burada

$Y = Y_1 \cup Y_2$, $.card\,(Y_1) \geq 4$, $card\,(Y) \geq 5$, $card\,(Y_1 \cap Y_2) = 0$ ve

$S_b: Y \times Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ olarak tanımlansın.

$$S_b(u, v, w) = \begin{cases} 0, eğer \;\; u = v = w = 0 \\ 3, eğer (u, v, w) \in Y_1^3 \\ 1, eğer\; (u, v, w) \notin Y_1^3 \end{cases}$$

(Y, S_b) çifti $s \geq 1$ için bir S_b-metrik uzaydır (Souayah vd., 2016).

Aşağıdaki tanım, S_b-metrik yapıdaki dizilerin yakınsaklığı ile ilgilidir.

Tanım 4.1.1

Bir S_b-metrik uzayda(Y, S_b) bir $\{w_m\}$ dizisi

(a) $w \in Y$ yakınsak⇔ $\lim_{m\to\infty} S_b(w_m, w_m, w) = 0.$

(b) Cauchy ⇔ $\lim_{m,p\to\infty} S_b(w_m, w_m, w_p) = 0$

Yine bir S_b-metrik uzay (Y, S_b) eğer (Y, S_b) 'deki tüm Cauchy dizileri (Y, S_b) 'de yakınsaksa tamdır (Rohen vd., 2017).

Tanım 4.1.2

(Y, S_b) s ≥ 1 ve $T: Y \to Y$ olmak üzere bir S_b-metrik uzayı olsun, eğer $Tw = w$ ise $w \in Y$ noktası T 'nin sabit noktası denir.

Tanım 4.1.3

(Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T_1, T_2 \ldots : Y \to Y$ olmak üzere bir S_b-metrik uzayı olsun, eğer $T_1 w = T_2 w = \cdots = w$ olmak üzere $w \in Y$ ortak bir sabit noktası denir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Şimdi sabit nokta sonuçlarını ve bunların genellemelerini S_b-metrik yapıda veriyoruz (Souayah vd., 2016).

Souayah vd. (2016), ilk büzülme teoremlerini, Banach 'yı S_b-metrik uzayda, $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ yardımcı fonksiyonunu kullanarak genişleterek sundular; bu artan bir fonksiyondur ve $\lim_{m\to\infty} \psi^{m}(r) = 0$, $\forall r > 0$ olur. Bu tür ψ dönüşümünü yardımcı fonksiyonların koleksiyonu olarak ele alalım.

Teorem 5.1.1

(Y , S_b) 'nin $s \geq 1$ için tam bir S_b-metrik uzayı ve

$T : Y \rightarrow Y$'nin sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım, böylece

$$S_b(Tu, Tv, Tw) \leq \psi(Sb(u, v, w)), \forall u, v, w \in Y, \qquad (1)$$

burada $\psi \in \Psi$ O zaman T'nin Y'de tek bir sabit noktası vardır.

Sedghi vd. (2016), Sedghi vd. (2012), eşlemelerin uyumlu koşulunu kullanarak, S_b-metrik yapıdaki dört üzerine dönüşüm için ortak sabit nokta sonuçlarını sundular. Dönüşüm kavramı S_b-metrik uzayların sunulduğu şekilde benzer bir şekilde sunulmaktadır (Souayah vd., 2016).

Tanım 5.1.1

Bir S_b-metrik uzayında (Y , S_b) iki dönüşümü T_1, T_2, Y'de herhangi bir $\{w_m\}$ dizisi için $\lim_{m\to\infty} T_1 w_n = \lim_{m\to\infty} T_2 w_m = w$ise $w \in Y$ için, bu $\lim_{m\to\infty} S_b(T_1T_2w_m, T_1T_2w_m, T_2, T_1, w_m) = 0$ (Sedghi vd., 2016).

Teorem 5.1.2

(Y , S_b) 'nin $s \geq 1$ ve $T_1, T_2, T_3, T_4 : Y \rightarrow Y$ uyumlu çiftlere sahip dönüşüm olduğu tam bir S_b-metrik uzay olduğunu varsayalım.

$\{T_1, T_4\}, \{T_2, T_3\}$ ile$T_1(Y) \subseteq T_4(Y), T_2(Y) \subseteq T_3(Y)$, böylece

$$S_b(T_1u, T_1u, T_2w) \leq \frac{\xi}{s^4} M(u, u, w), \forall u, w \in Y, 0 < \xi < 1, s \geq \frac{3}{2}, \qquad (2)$$

Burada

$$M(u, u, w) = \sup S_b(T_3u, T_3u, T_4w) , S_b(T_1u, T_1u, T_3u) , S_b(T_2w, T_2u, T_4w) ,$$
$$\frac{1}{2}[S_b(T_3u, T_3u, T_2w) + S_b(T_1u, T_1u, T_4w)] .$$

O zaman T_1, T_2, T_3, T_4 eşlemeleri Y 'de benzersiz bir ortak sabit noktaya sahiptir (Sedghi vd., 2016).

Örnek 5.1.1

$s = 4$ için S_b-metrik uzayı (Y, S_b) 'yi ele alalım, burada $Y = [0, 1]$

Ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir: .

$$S_b(u, v, w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)2, \forall\, u, v, w \in Y.$$

O zaman eşlemeler T_1, T_2, T_3, T_4 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$T_1 w = (\frac{w}{4})^8$, $T_2 w = (\frac{w}{4})^4$, $T_3 w = (\frac{w}{4})^4$, $T_4 w = (\frac{w}{8})^2$ $\forall w \in Y$ Teorem 17.2'yi $\xi = \frac{25}{4^4} <$ 1 için ve benzersiz ortak sabit noktaya sahip olmak üzere sağlar (Sedghi vd., 2016)..

Açıklama 2

1) Eşlemeler T_1, T_2 (sırasıyla T_3, T_4) Teorem 17.2'deki özdeşlik eşlemeleri olarak kabul edilirse, o zaman eşlemeler T_3, T_4 (sırasıyla. T_1, T_2) tek bir ortak sabit noktaya sahiptir. 2) Eşlemeler T_3, T_4Teorem 17.2'deki özdeşlik eşlemeleri olarak kabul edilirse ve $T_1, = T_2 = T$ ise, o zaman eşleme T tek bir sabit noktaya sahiptir (Sedghi vd., 2016).

Açıklama 3

Açıklama 2'den, Teorem 17.2'nin Teorem 17.1'in açık bir genellemesi olduğunu unutmayın, çünkü Souayah vd. (2016), Teorem 17.1'indeki öz eşlemenin süreklilik koşulu Sedghi vd. (2016), Teorem 17.2'sinde serbest bırakılmıştır (Rohen vd., 2018).

S_b-metrik yapıda, Rohen vd. (2018), rasyonel terimlerin yedi sabit katının toplamını içeren rasyonel kasılmalar için birleştirilmiş tesadüf noktası sonuçlarını tanıttı.

Açıklama 4

Rohen vd. (2017), yalnızca kalan iki koşulu (S_2) ve (S_3) içeren S_b-metrik uzayını yeniden tanımlamak için Tanım 3'ün (S_2) koşulunu yayınladı. (S_2) koşulu yeni yeniden tanımlanmış. S_b-metrik uzayının koşullarına eklenirse, bu durumda S_b-metrik uzay simetrik olur. S_b-metrik uzay olarak adlandırılacaktır. Aşağıdaki örnek yukarıdaki açıklamayı göstermektedir.

Örnek 5.1.2

$s \geq 2\, için$ (Y, S_b) çiftini ele alalım, burada $Y = R$ ve

$S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$şu şekilde tanımlanır:

$$S_b(u,v,w) = \begin{cases} 0, eğer\ \ u = v = w \\ 2, eğer\ u = 0, w = 1 \\ 4,\ eğer\ u = v = 1, w = 0 \\ 1 eğer\ diğer\ durumlar \end{cases}$$

O zaman (Y, S_b) çifti $s \geq 2$ için simetrik olmayan bir S_b-metrik uzaydır (Rohen vd., 2018).

Tanım 5.1.2

(Rohen vd,2018) (Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T_1, T_2,: Y \times Y \rightarrow Y$ için bir S_b−metrik uzay olsun, $(u,w) \in Y \times Y$ noktası $T_1, T_2, T_1(u,w) = T_2(u,w)$ ve $T_1(w,u) = T_2(w,u)$ genel dönüşüm. $T_1(u,w) = T_2(u,w) = u$ ve $T_1(w,u) = T_2(w,u) = w$ durumunda, (u,w) noktasına T_1ve T_2'nin ortak birleştirilmiş sabit noktası denir.

Teorem 5.1.2

(Y, S_b), $s \geq 1$ ve $T_1, T_2 : Y \times Y \rightarrow Y$ için simetrik tam bir S_b-metrik uzay olsun, böylece

$$S_b(T_1(u,v), T_1(u,v), T_2(w,x)) \leq M(u,v,w,x), \forall u,v,w,x \in Y \tag{3}$$

Burada

$$M(u,v,w,x) = \xi_1 \frac{S_b(u,u,w) + S_b(v,v,x)}{2} + \xi_2 \frac{S_b\big(T_1(u,v), T_1(u,v), T_2(w,x)\big) S_b(u,u,w)}{1 + S_b(u,u,w) + S_b(v,v,x)}$$
$$+\xi_3 \frac{S_b\big(T_1(u,v), T_1(u,v), T_2(w,x)\big) S_b(v,v,x)}{1 + S_b(u,u,w) + S_b(v,v,x)}$$
$$+\xi_4 \frac{S_b\big(u,u,T_1(u,v)\big) S_b(u,u,w)}{1 + S_b(u,u,w) + S_b(v,v,x)} + \xi_5 \frac{S_b\big(u,u,T_1(u,v)\big) S_b(u,u,w)}{1 + S_b(u,u,w) + S_b(v,v,x)}$$
$$+\xi_6 \frac{S_b\big(w,w,T_2(w,x)\big) S_b(u,u,w)}{1 + S_b(u,u,w) + S_b(v,v,x)} + \xi_7 \frac{S_b\big(w,w,T_2(w,x)\big) S_b(v,v,x)}{1 + S_b(u,u,w) + S_b(v,v,x)}$$

İle $\xi i \geq 0, \sum_{i=1}^{7} \xi i\ \xi i < 1$ ve $s < \frac{1-\xi 2-\xi 3-\xi 6-\xi 7}{\xi 1+\xi 4+\xi 5}$ O zaman eşlemeler T_1, T_2, Y 'de benzersiz bir $i = 1$ ortak ortak sabit noktaya sahiptir (Rohen vd., 2018).

Açıklama 5

Eğer eşlemeler T_1, T_2, bir olarak kabul edilirse, yani Teorem 17.3'te $T_1 = T_2$= T ise, o zaman eşleme.T benzersiz bir bağlı sabit noktaya sahiptir. Aşağıda [19]'da Teorem 17.3'ün bir sonucu verilmiştir.

Sonuç 4.1.1 (Y, S_b) 'nin simetrik tam bir. S_b-metrik uzayı olsun. $s \geq 1$ ve $T_1, T_2, : Y \times Y \rightarrow Y$, böylece her $u, v, w, x \in Y$ için,

$$S_b\big(T_1(u,v), T_1(u,v), T_2(w,x)\big)$$
$$\leq \xi_1 \frac{S_b(u,u,w)+S_b(v,v,x)}{2}$$
$$+ \xi_2 \frac{S_b(u,u,T_1(u,v))S_b(w,w,x)}{1+s[S_b(u,u,w)+S_b(v,v,x)+S_b(u,u,T_2(u,v))+S_b(w,w,T_1(w,x))}$$

Burada $\xi i \geq 0, \sum_{i=1}^{2} \xi i < 1$ ve $s < \frac{1-\xi 2}{\xi}$ ortak bağlı sabit nokta Y O zaman dönüşüm T_1, T_2 benzersiz bir (Rohen vd., 2018).

Açıklama 6

Eğer $T_1 = T_2$= T Sonuç 1'de ise, o zaman dönüşüm T benzersiz bir bağlı sabit noktaya sahiptir. Aşağıdaki örnek Teorem 17.3'ü göstermektedir.

Örnek 5.1.3

$s = 2$ için S_b-metri$k$ uzayı (Y, S_b) 'yi ele alalım, burada $Y = R$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ şu şekilde tanımlansın:

$$S_b(u,v,w) = |u - w| + |v - w|, \forall\, u, v, w \in Y$$

O zaman T_1, T_2 eşlemeleri şu şekilde tanımlanır: $(T_1(u,v), T_1(u,v) = \frac{2u-w+11}{12}$, $\forall u, w \in R$ $\xi_1 = \frac{1}{3}$, $\xi i = 0, i = 2,3,4,5,6,7$ için Teorem 17.3'ü karşılar ve benzersiz bir bağlı 12 sabit noktaya sahiptir (1, 1) (Rohen vd., 2018).

Açıklama 7

7 Örnek 4'ün $\xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_2 = 0$ $i$çin Sonuç 1'i de karşıladığını ve sonucun bu olduğunu unutmayın. Sedghi vd. (2017), artan sürekli fonksiyonların yardımıyla bir çift öz eşleme için $R-$ zayıf değişmeli koşulunu kullanarak $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sağlayan $\varphi(r) < r, r > 0$ ve $\varphi(0) = 0$, Sedghi ve ark. aşağıdaki ortak sabit nokta sonuçlarını önermiştir. Bu tür fonksiyonların koleksiyonunun ile gösterilmesine izin verin.

Tanım 5.1.3

Bir S_b-metrik uzayda (Y, S_b) iki eşleme T_1, T_2olarak adlandırılır $R-$zayıf değişmeli eğer bazı $R \geq 0$ varsa, böylece

$$S_b(T_1T_2w, T_1T_2w, T_2T_1w) \leq RS_b(T_1u, T_1u, T_2w), \forall\, w \in Y.$$

$R = 1$ durumunda, basitçe T_1, T_2'yi zayıf değişmeli dönüşümler olarak adlandırırız (Sedghi vd., 2017).

Örnek 5.1.4

$s \geq 1$ için S_b-metrik uzayı (Y, S_b) için $Y = R$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$S_b(u, v, w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)^2, \forall\, u, v, w \in Y.$$

$T_1 w = 2w - 1, T_2 w = w^2, \forall\,, w \in R$ olarak tanımlanan T_1, T_2eşlemeleri $R(= 4) -$zayıfça değişmeli, ancak zayıfça değişmeli değildir.

Teorem 5.1.3

(Y, S_b) için simetrik tam bir S_b-metrik uzay olsun. $s \geq 1$ ve $T_1, T_2 : Y \rightarrow Y$ olsun.$T_1(Y) \subseteq T_2(Y)$ ile R−zayıf değiş tokuşlu fonksiyonlar, böylece.

$$S_b(T_1 u, T_1 u, T_1 w) \leq \frac{1}{4s^6} \varphi(S_b(T_2 u, T_2 u, T_2 w)), \forall u, w \in Y, \qquad (5)$$

Burada $\varphi \in \varphi$ Ayrıca, T_1, T_2 eşlemelerinden herhangi biri sürekliyse, o zaman T_1, T_2'nin Y'de benzersiz bir ortak sabit noktası vardır. Şimdi Teorem 17.4'ü sağlayan bir örneğimiz var (Sedghi, vd., 2017).

Örnek 5.1.5

$s = 4$ için S_b-metrik uzayı (Y, S_b)'yi ele alalım, burada $Y = R$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ aşağıdaki gibi tanımlansın (Sedghi vd., 2017):

$$S_b(u, v, w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)^2, \forall\, u, v, w \in Y.$$

O zaman $R-$zayıf değişmeli dönüşüm T_1, T_2 aşağıdaki gibi tanımlansın:

$T_1 w = 1$ $T_2 w = 2w - 1$ ve $\forall, w \in R$ benzersiz ortak sabit noktaya sahip $\varphi(r) = \frac{3r}{4}$ için Teorem 4.1.3 ü sağlar.

Açıklama 8

Teorem 17.4'te eşleme T_2 özdeşlik olarak kabul edilirse, eşleme T_1 tek bir sabit noktaya sahiptir. Mlaiki vd. (2017), ψ−büzülmesi genelleştirmek için, Souayah vd. (2017), Mlaiki vd. (2017) $\alpha - \psi$ büzülmesi sonuçlarının öz eşlemenin $\alpha-$kabul edilebilirlik koşulunu kullanarak sunulduğunu ifade ettiler.

Tanım 5.1.4

Bir S_b-metrik uzayda(Y, S_b), bir öz eşleme $T : Y \to Y$ ise $\alpha-$kabul edilebilir olarak adlandırılır (Mlaiki vd., 2017).

$$\alpha(u, v, w \geq 1) \Rightarrow S_b(Tu, Tv, Tw) \geq 1,$$

burada $\alpha : Y \times Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ olarak alınmıştır.

Teorem 5.1.4

(Y, S_b) s ≥ 1 ve $T : Y \to Y$ için simetrik tam bir S_b-metrik uzay olsun $\alpha-$kabul edilebilir sürekli bir fonksiyon olsun, böylece en az bir $w_0 \in Y$,

$\alpha(w_0, w_0, T_{w_0}) \geq 1$ ve bazı $\psi \in \Psi$,

$$\alpha(u, v, w)S_b(Tu, Tv, Tw) \leq \psi(Sb(u, v, w)), \forall u, v, w \in Y.$$

O zaman T'nin Y'de sabit bir noktası vardır (Mlaiki vd.,2017).

Açıklama 9

Teorem 17.5'in eşlemede süreklilik kısıtlamasını içerdiğine dikkat edin T Süreklilik kısıtlamasını kaldırmak için Mlaiki vd. (2017), $\alpha-$değişmerli koşulu olarak bilinen ardışık bir koşul ekleyerek aşağıdaki sonucu tanımladılar.

Sonuç 5.1.2 (Y, S_b) $s \geq 1$ için simetrik tam bir S_b-metrik uzay olsun ve $T : Y \to Y$ bir $\alpha-$kabul edilebilir fonksiyon olsun, böylece $\exists\, w_0 \in Y$ ile $\alpha(w_0, w_0, T_{w_0}) \geq 1$ ve bazı $\psi \in \Psi$ için,

$$\alpha(u, v, w)S_b(Tu, Tv, Tw) \leq \psi(Sb(u, v, w)), \forall u, v, w \in Y. \ (7)$$

Y'de herhangi bir yakınsak dizi $\{w_m\}$ için, $w \in Y$'ye yakınsayan olsun.

$\alpha\,(w_m, w_m, w_{m+1}) \geq 1 \Rightarrow \alpha\,(w_m, w_m, w) \geq 1, \forall\, m \in N$ ise, T'nin Y'de sabit bir noktası vardır (Mlaiki vd., 2017).

Açıklama 10

Mlaiki ve diğerlerinin Teorem 4.1.5 ve Sonuç 4.1.2'sinde , sabit noktanın tek olmayabileceğini görüyoruz. Sabit noktanın tekliği için Teorem 17.5 koşullarına ek olarak aşağıdaki koşulu eklemeliyiz:

$\exists v \in Y$ için $\alpha(u, u, v) \geq 1, \alpha(w, w, v) \geq 1$ her iki sabit nokta için $u, w \in Y$. Aşağıdaki örnek Teorem 4.1.5 ile Açıklama 10'u göstermektedir.

Örnek 5.1.6

$s \geq 1$ için S_b-metrik uzayı (Y, S_b)'yi ele alalım, burada

$Y = [0,3]\backslash(1,2)$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ şu şekilde tanımlanır (Mlaiki vd., 2017):

$$S_b(u,v,w) = \begin{cases} |\mathrm{u} - \mathrm{w}| + |\mathrm{v} - \mathrm{w}|, \text{if } \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in [0,1] \\ sup\{u,v,w\}\ diğer\ durumlar \end{cases}$$

O zaman eşleme. $T : Y \rightarrow Y$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$Tw = \begin{cases} \frac{1+w}{2}\ eğer\ 0 \leq w \leq 1 \\ \frac{3}{2}\ eğer\ w = 2 \\ \frac{2+w}{2}\ eğer\ 2 < w \leq 3 \end{cases}$$

Teorem 17.5'i tatmin eder, çünkü $\psi(r) = \frac{1}{2}r$ ve

$$\alpha(u,v,w) = \begin{cases} e^{sup\{u,v\}-w}\ eğer\ sup\{u,v\} - w \geq 0 \\ 0\ eğer\ sup\{u,v\} - w \leq 0 \end{cases}$$

benzersiz bir sabit noktaya sahip olur. 1. Saleem ve diğerleri.

dönüşümü çiftlerinin uyumluluğu kavramını ve Tanım 11'de tanımlanan üçlü .(ψ, φ, F)'nin monotonluğunu birleştirerek Saleem vd. (2017), Souayah vd. (2016), Sedghi vd. (2012), sonuçlarını aşağıdaki gibi genelleştirdiler.

Tanım 5.1.5

Üçlü bir (ψ, φ, F) eğer,

$u \leq w \Rightarrow F(\psi(u), \varphi(u)) \leq F(\psi(w), \varphi(w)), \forall u, w \in \mathbb{R}^+$ ise monoton olur $F: [0,\infty)^2 \rightarrow (-\infty, \infty)$ ve $F(r_1, r_2) \leq r_1$ ve $F(r_1, r_2) = r_1 \Rightarrow ya\ r_1 = 0$ ya da $r_2 = 0$ koşullarını sağlar; $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan süreklidir ve $\psi(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ koşullarını sağlar; φ: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ süreklidir ve $\varphi(r) > 0, \forall r > 0$ ve $\varphi(0) \geq 0$ koşullarını sağlar (Saleem vd., 2017).

Örnek 5.1.7

Diyelim ki $\psi(r) = \sqrt{r}, 0 \leq r \leq 1, \psi(r) = r^2, r > 1; \varphi(r) = \sqrt{r}$; $F(r_1, r_2) = r_1 - r_2$. O zaman üçlü.(ψ, φ, F) monotondur (Saleem vd., 2017).

Örnek 5.1.8

$\psi(r) = \sqrt{r}, 0 \leq r \leq 1, \psi(r) = r^2, r > 1; \varphi(r) = r^2$; $F(r_1, r_2) = r_1 - r_2$ olsun. O zaman üçlü.(ψ, φ, F) monotondur (Saleem vd., 2017).

Teorem 5.1.4

(Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T_1, T_2, T_3, T_4 : Y \to Y$ için simetrik tam bir S_b-metrik uzay olsun: $\{T_1, T_3\}, \{T_2, T_4\}$ ile $T_1(Y) \subseteq T_3(Y), T_2(Y) \subseteq T_3(Y)$ uyumlu çiftlere sahip dönüşümüdür, böylece

$\psi(s^4 S_b(T_1u, T_1u, T_2w)) \leq F[\psi(M(u,w)), \varphi(M(u,w))], \forall u, w \in Y,$ (8)

burada

$M(u,w) = \sup S_b(T_3u, T_3u, T_4w), S_b(T_1u, T_1u, T_3u), S_b(T_2w, T_2w, T_4w),$

$\frac{1}{2}[S_b(T_3u, T_3u, T_2w) + S_b(T_1u, T_1u, T_4u)]$

ve (ψ, φ, F) Tanım 11'de tanımlanan monotondur. Eğer $s > \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ve T_3, T_4 sürekliyse o zaman T_1, T_2, T_3, T_4 eşlemeleri Y'de benzersiz bir ortak sabit noktaya sahiptir (Saleem vd., 2017).

Örnek 5.1.9.

$s = 2$ için S_b-metrik uzayı (Y, S_b) yi ele alalım, burada $Y = [0,1]$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ şu şekilde tanımlanır (Saleem vd., 2017):

$$S_b(u,v,w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)^2, \forall u, v, w \in Y.$$

Bu durumda, T_1, T_2, T_3, T_4 eşlemeleri aşağıdaki gibi tanımlanır: .$T_1w = \left(\frac{w}{3}\right)^4, T_2w = \left(\frac{w}{9}\right)^2, T_3w = \left(\frac{w}{3}\right)^2$, $T_4w = \frac{w}{3}$ $\forall w \in Y$ Teorem 17.6'yı için sağlar. $\psi(r) = r, \varphi(r) = \frac{729}{160 \times \sqrt{10}} - 1, F\ (r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2 + 1$,tek bir ortak sabit noktaya sahiptir. 0.

Açıklama 11

(1) dönüşümler T_1, T_2 (sırasıyla. T_3, T_4) Teorem 17.6'daki özdeşlik eşlemeleri olarak kabul edilirse, o zaman dönüşümler T_3, T_4 (sırasıyla. T_1, T_2) benzersiz bir ortak sabit noktaya sahiptir. (2) Eşlemeler T_3, T_4Teorem 17.6'daki özdeşlik dönüşümleri olarak kabul edilirse ve $T_1 = T_2 = T$ ise, o zaman dönüşümü Thas benzersiz bir sabit noktadır (Saleem vd., 2017). Thounaojam vd. (2021), Gulyaz ve diğerlerinin b-metrik yapıdaki eşlemelerinin S_b-metrik yapıya kabul edilebilirliği ile ilgili olarak $\alpha-$Meir-Keeler büzülmesi sonuçlarını yürüttüler ve sonuca vardılar.

Tanım 5.1.6

Bir S_b-metrik uzayda(Y, S_b) kendi kendine eşlenen $T : Y \to Y$,

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ ise AI tipinde $\alpha-$Meir-Keeler büzülmesi olarak adlandırılır, böylece (Thounaojam vd., 2021)

$$\varepsilon \leq M(u,v,w) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \alpha(u,v,w)Sb(Tu,Tv,Tw) < \frac{\varepsilon}{s}$$

Burada $\alpha : Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ve

$$M(u,v,w) = sup\{S_b(u,v,w), S_b(u,u,Tu), S_b(v,v,Tv), S_b(w,w,Tw)\}.$$

• AI tipindeyse $\alpha-$Meir-Keeler büzülmesi $u = v$ ise, kasılmaya AII tipinde $\alpha-$Meir-Keeler kasılması denir.

• Eğer AI tipinde $\alpha-$Meir-Keeler kontraksiyonu.

$M(u,v,w) = sup\{S_b(u,v,w), S_b(u,u,Tu)S_b, (v,v,Tv), S_b\ (w,w,Tw), \frac{1}{4}\ [S_b(u,u,Tv) + S_b(v,v,Tw) + S_b\ (w,w,Tu)]\}$ ise, kontraksiyona BI tipinde .α−Meir-Keeler kontraksiyonu denir.

• Eğer BI tipinde .α−Meir-Keeler dönüşümü $u = v$ ise, dönüşümü BII tipinde $\alpha-$Meir-Keeler dönüşümü denir.

Teorem 5.1.5

$(Y\ , S_b)$ 'nin için simetrik tam bir S_b-metrik uzay olduğunu varsayalım.

$s \geq 1$ and $T : Y \rightarrow Y$ AI tipinde bir $\alpha-$kabul edilebilir.α−Meir-Keeler sürekli büzülmesi olsun. O zaman T'nin Y'de bir sabit noktası vardır (Thounaojam vd., 2021).

Açıklama 12

Teorem 4.1.5'de görüyoruz ki, sabit noktanın tekliği belirtilmemiştir. Teorem 17.7'nin koşullarına ek olarak, aşağıdaki koşulu eklersek (Thounaojam vd., 2021):

$\exists\, v \in Y$ böylece $\alpha(u,u,v) \geq 1, \alpha(w,w,v) \geq 1$ herhangi iki sabit nokta $u, w \in Y$ için
O zaman T'nin sabit noktası tek olur. (2) Süreklilik koşulunu serbest bırakmak için Teorem 4.1.5'deki T'ye, Sonuç 2'de tanımlanan $\alpha-$değişmeli koşulunu ekleyebiliriz.

Açıklama 13

Teorem 4.1.5 ve Açıklama 11, AII, BI ve BII tiplerinin diğer tüm $\alpha-$Meir Keeler büzülmesi için doğrudur (Thounaojam vd., 2021).

Örnek 5.1.10

s = 2 için S_b-metrik uzayı (Y, S_b) 'yi ele alalım, burada $Y = [0,\infty)$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ $S_b(u,v,w) = |v + w - 2u|$ olarak tanımlanabilir. Daha sonra eşleme $T: Y \to Y$ (Thounaojam vd., 2021).

$$Tw = \begin{cases} \frac{w^2}{8} \; eğer\; 0 \leq w \leq 1 \\ \frac{1}{8} + \log((w)) \; eğer\; w \in (1,\infty) \end{cases},$$

Teorem 17.7'yi sağlar, çünkü

$$(u,v,w) = \begin{cases} 1 \; eğer \; \mathrm{u,v,w} \in [0,1] \\ 0 \; diğer\; durumlar \end{cases}$$

tek bir sabit noktaya sahip olur. Aytimur ve diğerleri Daha sonra Aytimur (2022), S_b-metrik yapıdaki sabit şekilli (çember, elips, hiperbol, Cassini eğrisi, Apollonius çemberi) problemleri analiz etmek için Jleli Samet tipi kasılmalarla ilgili geometrik yorumlama sundu.

Tanım 5.1.7

$s \geq 1$ için bir S_b-metrik uzayında (Y, S_b), $w_0, w_1, w_2 \in Y$ olsun, yarıçapı ρ olan ve w_0 merkezli bir daire şu şekilde verilir: $C^{S_b}_{w_0\rho} = \{w \in Y$

$S_b(w,w,w0) = \rho\}$; yarıçapı ρ olan ve w_0 merkezli bir disk şu şekilde verilir: $D^{S_b}_{w_0\rho} = \{w \in Y : S_b(w,w,w_0) \leq \rho\}$; elips aşağıdaki şekilde verilir. $E^{S_b}_{\rho}(w_1,w_2) = \{w \in Y : S_b(w,w,w_1) + S_b(w,w,w_2) = \rho\}$; hiperbol aşağıdaki şekilde verilir. $H^{S_b}_{\rho}(w_1,w_2) = \{w \in Y : |S_b(w,w,w_1) - S_b(w,w,w_2)| = \rho\}$; Cassini eğrisi aşağıdaki şekilde verilir. $C^{S_b}_{\rho}(w_1,w_2) = \{w \in Y : S_b(w,w,w_1)S_b(w,w,w_2) = \rho\}$; Bir Apollonius çemberi aşağıdaki şekilde verilir.

$A^{S_b}_{\rho}(w_1,w_2) = w \in Y \setminus \{w_2\}: \frac{S_b(w,w,w_1)}{S_b(w,w,w_2)} = \rho$ $T: Y \to Y$ eğer $Tw = w, \forall w \in Fig$ Fig sabit şekli denir (Aytimur vd., 2022).

Örnek 5.1.11

Bir S_b-metrik uzayında (Y, S_b) $s = 1$ için, burada $Y = R$ ve S_b: Y ×Y ×Y→ $\mathbb{R}^+$ R+ aşağıdaki şekilde verilir (Aytimur vd., 2022).

$$S_b(u,v,w) = (|u - v| + |v - w| + |w - u|)^3, \forall\, u,v,w \in Y,$$

$w_0 = (1,1,1) = w_1, w_2 = (-1,-1,-1)$ ve $.\rho = 40$ olsun. O zaman

$$C^{S_b}_{w_0,\rho} = \{(u,v,w)\epsilon Y: |u-1|^3 + |v-1|^3 + |w-1|^3 = 5$$

$$D_{w_0,\rho}^{S_b} = \{(u,v,w)\epsilon Y: |u-1|^3 + |v-1|^3 + |w-1|^3 \leq 5\}$$

$$E_\rho^{S_b}(w_1,w_2) = \{(u,v,w)\epsilon Y: (|u-1| + |u+1|)^2 + (|v-1| + |v+1|)^2 + (|w-1| + |w+1|)^2 \leq 50$$

$$H_\rho^{S_b}(w_1,w_2) = \{(u,v,w)\epsilon Y: \left||u-1| - |u+1|\right|^3 + \left||v-1| - |v+1|\right|^3 + \left||w-1| - |w+1|\right|^3 \leq 5\}$$

$$C_\rho^{S_b}(w_1,w_2) = \{(u,v,w)\epsilon Y: (|u-1||u+1|)^3 + (|v-1||v+1|)^3 + (|w-1||w+1|)^3 \leq 5\}$$

$$A_\rho^{S_b}(w_1,w_2) = \{(u,v,w)\epsilon Y: \left(\frac{|u-1|}{|u+1|}\right)^3 + \left(\frac{|v-1|}{|v+1|}\right)^3 + \left(\frac{|w-1|}{|w+1|}\right)^3 \leq 5\}$$

Teorem 5.1.6

(Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T : Y \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere simetrik tam bir S_b-metrik uzay olsun, böylece $w_0, w_1, w_2 \in Y$. (Aytimur vd., 2022)

$$S_b(w,w,w_0) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(w,w,Tw)) \leq [\varphi(M(w,w_0,w_1,w_2))]^\xi \qquad (9)$$

burada $0 < \xi < 1, \rho = min\{S_b(w,w,Tw): w \neq Tw, w \in Y\}, \varphi$ (9): $(0,\infty) \to , (1,\infty)$ artmaktadır ve

• $M(w,w_0,w_1,w_2) = S_b(w,w,w_0), \forall\, w \in Y$ olduğunda (9) eşitsizliğine Jleli Samet tipi denir. $D_{w_0} - S_b$-büzülmesi T $D_{w_0\rho}^{S_b}$ diskini sabitler.

• $M(w,w_0,w_1,w_2) = S_b(w,w,w_1) + S_b(w,w,w_2), \forall w \in Y \setminus \{w_1,w_2\}$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ olduğunda, (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi denir. $E_{w_1,w_2} - S_b$ büzülme T $E_\rho^{S_b}$ (w_1,w_2) elipsi sabitler

• $M(w,w_0,w_1,w_2) = |\, S_b(w,w,w_1) - S_b(w,w,w_2)|, \forall w \in Y \setminus \{w_1,w_2\} \rho > 0$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ olduğunda, (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi denir. $H_{w_1,w_2} - S_b$-büzülmesi T $H_\rho^{S_b}$ (w_1,w_2) hiperbolü sabitler

• $M(w,w_0,w_1,w_2) = S_b(w,w,w_1)\, S_b(w,w,w_2), \forall w \in Y \setminus \{w_1,w_2\}$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ olduğunda, (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi denir$H_{w_1,w_2} - S_b$-büzülmesi T $C_\rho^{S_b}$ (w_1,w_2) Cassini eğrisini sabitler.

$M(w,w_0,w_1,w_2) = \frac{S_b(\mathrm{w,w},W_1)}{S_b(\mathrm{w,w},w_2)}$ olduğunda, $\forall w \in Y \setminus \{w_1,w_2\}$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi $A_{w_1,w_2} - S_b$-büzülmesi denir.T Apollonius çemberi

$A_{\rho}^{S_b}$ (w_1, w_2)'yi sabitler. Aşağıdaki örnek sabit rakamlara sahip olduğu için Teorem 4.1.5'i sağlar.

Thounaojam vd. (2021); İki S_b–metrik uzaylar bağlamında Thounaojam vd. (2022) teoriyi genişletmek için bağlı tesadüf noktası ve bağlı sabit nokta sonuçlarını araştırdı.

Tanım 5.1.7

Bir S_b–metrik uzayda (Y, S_b), iki dönüşüm $T_1 : Y \times Y \to Y, T_2 : Y \to Y$ olarak adlandırılır. w–uyumlu ise (Indubala vd., 2022)

$$T_1(u,w) = T_2u, T_1(w,u) = T_2w \Rightarrow T_2T_1(u,w) = T_1(T_2u, T_2w), \forall\, u,w \in Y.$$

Teorem 5.1.8

$(Y_1, S_{b_1}), (Y_2, S_{b_2})$ evrensel bir küme Y'de $s \geq 1$ için iki simetrik S_b −metrik uzay olsun; burada $S_{b_2}(u,u,w) \leq S_{b_1}(u,u,w), \forall\, u,w \in Y$ ve $T_1 : Y \times Y \to Y, T_2 : Y \to Y, T_1(Y \times Y) \subseteq T_2(Y)$ ile w uyumluluğuna sahip iki eşlemedir, böylece. $\forall\, u,v,w,x \in Y$. (Indubala vd., 2022)

$S_{b_1}(T_1(u,w), T_1(u,w), T_1(v,x)) + S_{b_2}(T_1(u,w), T_1(u,w), T_1(v,x)) \leq$
$M(u,v,w,x))$, (10)

Burada.

$$\begin{aligned} M(u,v,w,x) = {} & \xi_1[S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_2v) + S_{b_2}(T_2w, T_2w, T_2x)] \\ & + \xi_2[S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_1(u,w)) + S_{b_2}(T_2w, T_2w, T_1(w,u))] \\ & + \xi_3[S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_1(v,x)) + S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_1(x,v))] \end{aligned}$$

ve $\xi \in [0,1], 0 \leq \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq \frac{1}{s^2}$ Eğer $T_2(Y)$ ise S_{b_1}-complete ise, o zaman eşlemeler T_1, T_2 Y'de benzersiz bir ortak bağlı sabit noktaya sahiptir.

Açıklama 14

(1) Teorem 4.1.7'dan ,w-uyumluluk koşulunu kaldırırsak, o zaman tek bir ortak bağlı sabit nokta yerine, T_1, T_2 Y'de bağlı bir çakışma noktasına sahip olur. (2) İki simetrik S_b–metrik uzay almak yerine, tek bir simetrik tam S_b–metrik uzay alırsak, o zaman sonuçlar da çıkarılabilir. (3) Eşleme T_2özdeşlik olarak kabul edilirse, o zaman karşılık gelen bağlı sabit nokta sonuçlarını elde ederiz. Teorem 4.1.6 kullanılarak çıkarılan bir örneğimiz var.

Örnek 5.1.12

(Indubala vd., 2022) s = 1 için iki S_b−metrik uzayı $(Y_1, S_{b_1}), (Y_2, S_2)$ düşünün, burada $Y = Y_1 = Y_2 = R$ ve $S_{b_1} S_{b_2},: Y \times Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ şu şekilde tanımlanır:

$$S_{b_1}(u, v, w) = (u + v - 2w)^2 \, \forall \, u, v, w \in Y_1,.$$

$$S_{b_2}(u, v, w) = \left(\frac{u + v - 2w}{2}\right)^2, \forall u, v, w \in Y_2.$$

Sonra eşlemeler T_1, T_2 olarak tanımlanır $T_1(u, w) = \frac{U-W}{3}, T_2 w = 2w, \forall u, w \in Y$ Teorem 17.9'u $\xi_1 = \frac{1}{9}$, $\xi_i = 0, i = 2{,}3 \; için$ karşılar ve benzersiz bir bağlı sabit noktaya sahiptir (0,0).

Ortak bağlı sabit nokta sonuçlarını temsil eden ve karşılık gelen integral denklemi kullanarak başlangıç değerli bir problemi çözen Rao ve arkadaşları tarafından yapılan başka bir genelleme daha vardır. Son zamanlarda, Tas ve arkadaşları, S_b−metrik uzayı bağlamında ortak sabit nokta sonuçlarını kanıtlayarak bazı geometrik özellikleri araştırdı. Teoriyi genelleştirmenin yanı sıra, parametrik düzeltilmiş doğrusal birim aktivasyon fonksiyonlarının da bazı şekilleri düzelttiğini öne sürdüler. Sonuç olarak, AraştırmacılarS_b−metrik 'i farklı şekillerde araştırdılar ve teoriyi birçok yönde genelleştirdiler.

Sadece bir öz eşleme içeren daralmalar için sabit nokta sonucuyla başlayarak, örnekler ve dikkat çekici yorumlarla, .w-uyumlu koşulları sağlayan dört eşlemeye kadar içeren daralmalar için tesadüf sabit nokta sonuçlarını, S_b−metrik yapı bağlamında ortak çiftli sabit nokta sonuçlarını tartıştık.

Ayrıca S_b−metrik uzaylarda daire, elips, hiperbol, Cassini eğrisi, Apollonius çemberi vb. gibi şekillerin geometrik özelliklerini yorumlayan bazı sabit şekil sonuçları da toplanmıştır. Bu sonuçları göstererek, genç araştırmacıları, uygulamalar için engin potansiyeli olan bu ilgi çekici alanı keşfetmek için hala bir fırsat olduğuna teşvik etmek istiyoruz.

KAYNAKÇA

Aytimur, H., & Tas, N. (2022). A geometric interpretation to fixed-point theory on Sb-metric spaces. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *10*(2), 95-104.

Bakhtin, I. (1989). The contraction mapping principle in quasimetric spaces. *Functional analysis*, *30*, 26-37.

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, *3*(1), 133-181.

Hieu, N. T., Thanh Ly, N. T., & Dung, N. V. (2014). A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S-metric spaces. *Thai Journal of Mathematics*, *13*(2), 369-380.

Jleli, M., & Samet, B. (2014). A new generalization of the Banach contraction principle. *Journal of inequalities and applications*, *2014*(1), 38. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-38

Özgür N.Y, & Taş, N. (2016). S-metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin bazı genelleştirmeleri. içinde *Vladimir Arnold'a Armağan Matematik ve Uygulamaları Üzerine Denemeler* (ss. 317-342). New York: Springer,

Özgür, N. (2019). Fixed-disc results via simulation functions. *Turkish Journal of Mathematics*, *43*(6), 2794-2805.

Özgür, N. Y., & Taş, N. (2017). Some new contractive mappings on S-metric spaces and their relationships with the mapping (S25). *Mathematical Sciences*, *11*(1), 7-16.

Özgür, N. Y., & Taş, N. (2018). Generalizations of metric spaces: from the fixed-point theory to the fixed-circle theory. In *Applications of Nonlinear Analysis* (pp. 847-895). Cham: Springer International Publishing.

Özgür, N. Y., & Taş, N. (2018, January). Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle. In *AIP conference proceedings* (Vol. 1926, No. 1, p. 020048). AIP Publishing LLC.

Özgür, N. Y., & Taş, N. (2019). Some fixed-circle theorems on metric spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, *42*(4), 1433-1449.

Özgür, N., & Taş, N. (2023). Geometric properties of fixed points and simulation functions. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, *16*(4), 91-108.

Özgür, N.Y, & Taş, N. (2017). Some fixed point theorems on SSS-metric spaces. *Matematički Vesnik*, *69*, 39-52.

Sedghi, S., & Van Dung, N. (2014). Fixed point theorems on S-metric spaces. *Matematički vesnik*, (255), 113-124.

Sedghi, S., Gholidahneh, A., Došenovic, T., Esfahani, J., & Radenovic, S. (2016). Common fixed point of four maps in Sb-metric spaces. *J. Linear Topol. Algebra*, *5*(2), 93-104.

Sedghi, S., Shobe, N., & Aliouche, A. (2012). A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces. *Matematički vesnik*, *64*(249), 258-266.

Tas, N. (2021, May). A contribution to the fixed-disc results on S-metric spaces. In *7th Ifs And Contemporary Mathematics Conference* (pp. 172-176).

Taş, N. (2020). Bilateral-type solutions to the fixed-circle problem with rectified linear units application. *Turkish Journal of Mathematics*, *44*(4), 1330-1344.

Taş, N. (2022). New fixed-disc results via bilateral type contractions on S-metric spaces. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *24*(1), 408-416.

Taş, N., & Özgür, N. (2021). New generalized fixed point results on Sb-metric spaces. *Konuralp Journal of Mathematics*, *9*(1), 24-32.